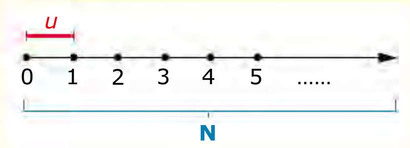
Lezione 1 A

Insieme N e operazioni in N

Sintesi visuale

Insieme N dei numeri naturali

È l'insieme costituito dai numeri 0, 1, 2, 3, 4, ...



Le operazioni in N e le loro proprietà

Operazione	Proprietà	ESEMPI
Addizione	• Interna a **N** (ossia la somma di due numeri naturali è sempre un numero naturale) • Commutativa $a+b=b+a$ • Associativa $(a+b)+c=a+(b+c)$ • Esiste l'elemento neutro $a+0=0+a=a$	 $2+3=3+2$ $(2+3)+5=2+(3+5)$ $3+0=0+3=3$
Sottrazione	• **Non** interna a **N** • **Non** commutativa • **Non** associativa • Invariantiva: la differenza tra due numeri naturali non cambia se a entrambi si aggiunge o si toglie uno stesso numero (purché sia possibile effettuare la sottrazione in **N**) $a-b=(a+c)-(b+c)$ $a-b=(a-c)-(b-c)$	$5-7$ non è eseguibile in **N** $3-2\neq 2-3$ $(5-3)-2\neq 5-(3-2)$ $7-4=(7+3)-(4+3)$ $7-4=(7-3)-(4-3)$ **Aggiungendo e sottraendo 3 ai due numeri**
Moltiplicazione	• Interna a **N** (ossia il prodotto di due numeri naturali è sempre un numero naturale) • Commutativa $a\cdot b=b\cdot a$ • Associativa $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ • Esiste l'elemento neutro $a\cdot 1=1\cdot a=a$ • Distributiva rispetto all'addizione e alla sottrazione a sinistra $a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c$ a destra $(a\pm b)\cdot c=a\cdot c\pm b\cdot c$	 $2\cdot 3=3\cdot 2$ $(2\cdot 3)\cdot 5=2\cdot(3\cdot 5)$ $2\cdot 1=1\cdot 2=2$ $2\cdot(10+15)=2\cdot 10+2\cdot 15$ $(6+7)\cdot 8=6\cdot 8+7\cdot 8$
Divisione	• **Non** interna a **N** • **Non** commutativa • **Non** associativa • Distributiva a destra (ma **non** a sinistra!) rispetto all'addizione $(a+b):c=a:c+b:c$ (purché tutte le divisioni siano possibili in **N**) • Invariantiva: il quoziente di due numeri non cambia se il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero diverso da 0 (purché la divisione sia possibile in **N**)	$5:7$ non è eseguibile in **N** $4:2\neq 2:4$ $(12:6):2\neq 12:(6:2)$ $(99+9):9=99:9+9:9$ $(99:9)=(99\cdot 3):(9\cdot 3)$ $(99:9)=(99:3):(9:3)$ **Moltiplicando e dividendo per 3 il dividendo e il divisore**

Legge di annullamento del prodotto e sue conseguenze

Legge di annullamento del prodotto

Il prodotto di due numeri a e b è uguale a zero se e solo se almeno uno dei due fattori è zero:

$$a \cdot b = 0 \quad \text{se e solo se} \quad a = 0 \text{ o } b = 0$$

Divisioni in cui il dividendo è zero

Hanno come risultato zero (purché il divisore sia diverso da zero).

ESEMPIO

$0 : 11 = 0$ perché $0 \cdot 11 = 0$

Divisioni in cui il divisore è zero

Non sono definite.

ESEMPIO

$6 : 0$ non ha alcun significato: infatti, per la legge di annullamento del prodotto, non esiste alcun numero che, moltiplicato per 0, dà come risultato 6.

Le potenze e le loro proprietà

Tipo di potenza	Definizione	ESEMPI
Potenza a esponente intero positivo maggiore di 1	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$	$(-2)^2 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{2 \text{ volte}} = +4$ $(-3)^3 = \underbrace{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{3 \text{ volte}} = -27$
Potenza a esponente 1	$a^1 = a$	$3^1 = 3 \quad (-2)^1 = -2$
Potenza a esponente 0	$a^0 = 1$, con $a \neq 0$	$3^0 = 1 \quad (-2)^0 = 1$

Proprietà delle potenze	In simboli	ESEMPI
Prodotto di potenze aventi la stessa base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^{12} \cdot 2^8 = 2^{12+8} = 2^{20}$
Quoziente di potenze aventi la stessa base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$
Potenza di un prodotto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(5 \cdot 7)^2 = 5^2 \cdot 7^2$
Potenza di un quoziente	$(a : b)^n = a^n : b^n$	$(8 : 2)^2 = 8^2 : 2^2$

ATTENZIONE

1. Una potenza di base 0 ed esponente positivo è sempre uguale a 0.
   Per esempio: $0^5 = 0$.
2. Il simbolo 0^0 è indefinito.

Lezione 1 B Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze in cui ti guidiamo a calcolare alcune potenze e ad applicare le proprietà delle potenze.

1 $7^3 \cdot 7^2 = 7^{\dots+\dots} = 7^{\dots}$ $\quad 7^{13} : 7^{11} = 7^{13-\dots} = 7^{\dots} = \dots$ $\quad (2^3)^2 = 2^{3\cdot\dots} = 2^{\dots} = \dots$

2 $2^4 \cdot 2^2 = 2^{\dots+\dots} = 2^{\dots} = \dots$ $\quad 7^{13} : 7^{13} = 7^{\dots-\dots} = 7^{\dots} = \dots$ $\quad (3^3)^4 = 3^{3\cdot\dots} = 3^{\dots}$

3 Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3\cdot 4} = 5^{12}$	No	$5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4} = 5^7$
$(4)^3 \cdot (3)^3 = (12)^3$	.....	....
$(4)^6 \cdot (4)^8 = (4)^{14}$	.....	....
$(4)^7 \cdot (4)^5 = (4)^{12}$	.....	....
$(10^2)^{10} = (10^{10})^2$	.....	....

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a semplificare alcune espressioni numeriche.

4

Passi del procedimento	Semplificare l'espressione: $24 : 2^2 \cdot 3 + 6^2 : 4 =$
Esegui prima le potenze.	$= 24 : \dots \cdot 3 + \dots : 4 =$
Esegui moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono.	$= \dots \cdot 3 + \dots =$
Esegui l'addizione.	$= \dots + \dots = \dots$

5

Passi del procedimento	Semplificare l'espressione: $\{[2^{15} : (2^3 \cdot 2^{10})] + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui i calcoli dentro le parentesi tonde.	$= \{[2^{15} : 2^{\dots}] + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui il calcolo dentro le parentesi quadre.	$= \{2^{\dots} + 6\}^{10} : 10^8 =$
Esegui il calcolo dentro le parentesi graffe e poi la divisione.	$= \dots^{10} : 10^8 = \dots$

Problemi e modelli

6 Completa la risoluzione del seguente problema.

Sara acquista un'auto che costa 16 700 euro, da cui le vengono scontati 2200 euro per il ritiro della sua vecchia auto. Potrebbe pagare in un'unica soluzione, ma questo la obbligherebbe a rinunciare ad altri acquisti, oppure in 54 rate da 306 euro l'una. In quest'ultimo caso, quale somma dovrebbe pagare in più?

Soluzione

Qual è la cifra che deve pagare Sara per l'acquisto dell'auto in un'unica soluzione?

....

Quale cifra dovrebbe versare complessivamente Sara se pagasse a rate?

....

Esegui l'operazione necessaria a calcolare quanto pagherebbe in più nel secondo caso:

....

[2024 euro]

Esercizi da svolgere

1 Completa la seguente tabella.

Operazione	Trasformazione	Risultato	Proprietà applicata
$27 + 12 + 33$	$27 + 33 + 12$	....	....
$58 - 23$	$55 - 20$	....	....
$37 \cdot 2 \cdot 5$	$37 \cdot 10$	....	....
$21 \cdot (10 + 15)$	$210 + 315$	....	....
$8 \cdot 11 \cdot 25$	$8 \cdot 25 \cdot 11$	....	....
$45 \cdot 11$	$450 + 45$	....	....

Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

2 2^6 ..... 4^3 $\qquad$ 3^2 ..... 2^3 $\qquad$ 5^3 ..... 12^2

3 12^0 ..... 10^0 $\qquad$ 13^1 ..... 18^1 $\qquad$ 100^3 ..... 1000^2

4 9^3 ..... 27^2 $\qquad$ $3 \cdot 4^2$ ..... $3^2 \cdot 4$ $\qquad$ $2^3 \cdot 3^2$ ..... $2 \cdot 6^2$

5 $2^2 \cdot 3^2$ ..... $6^5 : 6^3$ $\qquad$ $3^0 \cdot 3^3$ ..... $12^5 : 6^5$ $\qquad$ $(10^2)^3$ ..... $2^5 \cdot 5^5$

Calcola il valore delle seguenti espressioni in N applicando, dove possibile, le proprietà delle potenze.

6 $[20 - (36 : 9 + 10 : 2 - 2^2) - (5^2 - 2 \cdot 2^3)]^2 : 6 - 1$ [5]

7 $\{[3 + 6 \cdot (2 + 2^2)] : 3 + 30 : 5 - 6 : 2\} : 4$ [4]

8 $[(2^6 \cdot 2^2)^2 : (2^5)^3]^3 - 1$ [7]

9 $[(3^8 : 3^6)^4 : (3^2)^3]^2 - 3^4$ [0]

10 $[(2^{12} : 2^{10})^4 : (2^3)^2]^2 - 2^0$ [15]

11 $2^7 \cdot (2^5)^2 : (2^4)^4 + 3^9 \cdot (3^2)^3 : (3^4)^3$ [29]

12 $[(16 : 8 : 2)^3 \cdot (24 : 6 : 2)^4 \cdot 2^7] : (2^3)^2$ [32]

13 $(16^4 : 8^3) : 2^4 + 27^2 : 81$ [17]

14 $\{[36 : (6 : 2)]^3 \cdot 12^4\} : (12^3)^2 - [(36 : 6 : 2)^3 \cdot 3^4] : (3^2)^3$ [9]

Problemi e modelli

15 All'inizio di giugno 2008 la popolazione italiana era di 59 798 184 abitanti. Durante il mese di giugno si sono avuti: 45 414 nati, 43 341 morti, 144 002 immigrati, 114 549 emigrati. Qual era la popolazione italiana alla fine di giugno? [59 829 710]

16 Vorrei comprare una videocamera che è possibile pagare in contanti, al prezzo di 1199 euro, oppure in 12 rate da 109 euro l'una. Quanto spenderei in più se la acquistassi a rate? [109 euro]

17 Per preparare in tre settimane l'esame di storia, Luca deve studiare un libro di 432 pagine. Decide di farne quattro letture: alla prima dedicherà 8 giorni, alla seconda 6, alla terza 4 e alla quarta i restanti giorni. Quante pagine dovrà leggere in ciascun giorno?
[Prima lettura: 54; seconda lettura: 72; terza lettura: 108; quarta lettura: 144]

18 Per preparare la pasta sfoglia si pone uno strato di burro tra due di pasta, ottenendo così tre strati, poi si lascia riposare il tutto per un po' e, a intervalli regolari, lo si ripiega in tre ottenendo ogni volta il triplo del numero degli strati. Se si facessero 5 ripiegamenti, quanti strati si otterrebbero? [$3^6 = 729$]

Lezione **2 A**

Multipli e divisori

Sintesi visuale

Multipli e divisori

Divisore e multiplo

Dati due numeri naturali a e b, si dice che a è multiplo di b, se esiste un numero naturale q, tale che $a = q \cdot b$. In tal caso si dice che «b è un divisore di a» oppure che «b divide a» oppure che «a è divisibile per b».

ESEMPIO

$20 = 5 \cdot 4$ ⇒ 20 è multiplo di 5 e di 4 ⇒ 5 e 4 sono divisori di 20
20 è divisibile per 5 e per 4

Numero primo

Ogni numero naturale maggiore di 1 che è divisibile soltanto per se stesso e per 1.

ESEMPI

I primi 10 numeri primi sono:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Scomposizione in fattori primi

Scrittura di un numero naturale come prodotto di numeri primi o di loro potenze.

ESEMPIO

$$540 = 54 \cdot 10 = \underbrace{2 \cdot 27}_{54} \cdot \underbrace{2 \cdot 5}_{10} = \underbrace{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5}_{\text{Scomposizione in fattori primi di 540}}$$

Massimo comune divisore (M.C.D.)

Dati due o più numeri naturali diversi da zero, è il più grande fra i loro divisori comuni.

ESEMPIO

I divisori di 4 sono: 1, 2, 4.
I divisori di 10 sono: 1, 2, 5, 10.
I più grande divisore comune tra 4 e 10 è 2:
M.C.D.(4, 10) = 2

Numeri primi fra loro (o coprimi)

Due numeri naturali tali che il loro massimo comune divisore è uguale a 1.

ESEMPI

Sono coprimi:
6, 7
perché
M.C.D.(6, 7) = 1

Non sono coprimi:
6, 8
perché
M.C.D.(6, 8) = 2

Minimo comune multiplo (m.c.m.)

Dati due o più numeri naturali diversi da zero, è il più piccolo fra i multipli comuni diversi da zero.

ESEMPIO

I multipli di 2 (diversi da zero) sono:
2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
I multipli di 3 (diversi da zero) sono:
3, 6, 9, 12, 15, 18, ...
Il più piccolo multiplo comune tra 2 e 3 è 6:
m.c.m.(2, 3) = 6

Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile...	... se e solo se	ESEMPI numeri divisibili	ESEMPI numeri non divisibili
per 2	lo è la sua ultima cifra	12; 344; 1028	13; 347; 1029
per 3 o per 9	lo è la somma delle sue cifre	4455 è divisibile per 3 e per 9 (4 + 4 + 5 + 5 = 18)	157 né per 9 né per 3 (1 + 5 + 7 = 13)
per 5	termina con 0 o con 5	340; 1005	4001; 1003
per 4 o per 25	lo è il numero formato dalle ultime due cifre a destra, o se termina con due zeri	3124 è divisibile per 4 175 è divisibile per 25 5200 è divisibile per 4 e per 25	117; 210 (né per 4 né per 25)
per 11	la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari, contate a partire da destra, è divisibile per 11	143 (3 + 1 − 4 = 0, e 0 è divisibile per 11) 5709 (9 + 7 − 0 − 5 = 11)	531 (1 + 5 − 3 = 3) 11111 (1 + 1 + 1 − 1 − 1 = 1)

Procedimento per il calcolo del massimo comune divisore

Si scompongono i numeri dati in fattori primi e si considera il prodotto dei fattori primi comuni a tutti i numeri assegnati, presi una sola volta, ciascuno con il *minimo* esponente con cui figura nelle scomposizioni.

ESEMPIO

Calcoliamo il M.C.D. tra 360 e 378.

il minimo è 2

il minimo è 1

$$\text{M.C.D.}(360, 378) = \text{M.C.D.}(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5,\ 2^1 \cdot 3^3 \cdot 7) = \underbrace{2^1 \cdot 3^2}_{\text{2 e 3 sono i soli fattori primi in comune alle due scomposizioni}} = 18$$

Procedimento per il calcolo del minimo comune multiplo

Si scompongono i numeri dati in fattori primi e si considera il prodotto dei fattori primi comuni e non comuni a tutti i numeri assegnati, presi una sola volta, ciascuno con il *massimo* esponente con cui figura nelle scomposizioni.

ESEMPIO

Calcoliamo il m.c.m. tra 54 e 180.

il massimo è 3

il massimo è 2

$$\text{m.c.m.}(54, 180) = \text{m.c.m.}(2^1 \cdot 3^3,\ 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1) = \underbrace{2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1}_{\text{2, 3 e 5 sono i fattori primi comuni e non comuni che compaiono nelle due scomposizioni}} = 540$$

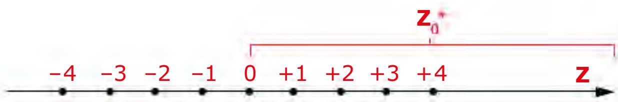
Lezione 3A

Insieme $\mathbb{Z}$ e operazioni in $\mathbb{Z}$

Sintesi visuale

Insieme Z dei numeri interi

Insieme costituito dal numero zero e da tutti i numeri che si ottengono associando a ciascun numero naturale due numeri, uno **positivo** preceduto dal segno + e uno **negativo** preceduto dal segno –.



Numeri concordi e discordi

Due numeri interi che hanno lo stesso segno si dicono **concordi**; due numeri interi con segni diversi si dicono **discordi**.

ESEMPI

–3 e +5 sono discordi

–3 e –2 sono concordi

Valore assoluto

Sia *a* un numero intero. Il valore assoluto di *a* si indica con il simbolo $|a|$ ed è così definito

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

ESEMPI

$|+5| = +5 \qquad |-3| = -(-3) = +3$

Poiché il segno + negli interi positivi viene spesso omesso si può scrivere anche:

$|+5| = 5 \qquad |-3| = 3$

Numeri opposti

Due numeri interi che hanno lo stesso valore assoluto ma segno opposto.

ESEMPIO

–3 e +3 sono due numeri opposti.

Operazioni in Z

Come calcolare...	Segno	Valore assoluto	ESEMPI
... la somma di due interi concordi	è uguale a quello dei due addendi	è uguale alla *somma* dei valori assoluti dei due addendi	$(-4) + (-5) = -(4 + 5) = -9$ segno uguale a quello dei due addendi valore assoluto uguale alla somma dei valori assoluti dei due addendi
... la somma di due interi discordi	è uguale a quello dell'addendo che ha valore assoluto maggiore	è uguale alla *differenza* fra il valore assoluto maggiore e quello minore dei due addendi	$(+2) + (-4) = -(4 - 2) = -2$ segno uguale a quello di –4 che, fra i due addendi, è quello di valore assoluto maggiore valore assoluto uguale alla differenza dei valori assoluti dei due addendi
... il prodotto di due interi	è + se i due numeri sono *concordi*, è – se sono *discordi*	è uguale al *prodotto* dei *valori assoluti* dei due numeri	$(-3) \cdot (-7) = +(3 \cdot 7) = +21$ segno + perché i due fattori sono concordi prodotto dei valori assoluti dei due fattori
... il quoziente di due interi (divisibili in **Z**)	è + se i due numeri sono *concordi*, è – se sono *discordi*	è uguale al *quoziente* dei *valori assoluti* dei due numeri	$(-16) : (+4) = -(16 : 4) = -4$ segno – perché i due numeri sono discordi quoziente dei valori assoluti dei due numeri

Le potenze con esponente positivo o nullo sono definite nell'insieme dei numeri interi in modo analogo a quanto visto in **N**; continuano inoltre a valere le stesse proprietà delle potenze.

Esercizi guidati

1 Completa le seguenti frasi in modo che risultino corrette. Alcuni completamenti sono eseguiti come esempio.

a. Il valore assoluto di -7 è 7

b. Il valore assoluto -8 è .....

c. Il valore assoluto di $+9$ è .....

d. I due numeri -10 e $+10$ sono opposti

e. I due numeri $+6$ e .... sono opposti

Completa i seguenti calcoli.

2 $|-6+18| : |-2-4| = |+12| : |\dots\dots| = 12 : \dots\dots = \dots\dots$

3 $(|-3| \cdot |-2| + |-4|) : |+2| = (3 \cdot \dots\dots + 4) : \dots\dots = \dots\dots : \dots\dots = \dots\dots$

Completa le seguenti uguaglianze in cui ti guidiamo a svolgere calcoli tra numeri relativi.

4 $-2 + (-3) - (-3) = -2 - \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots$ $\quad$ $-5 - (+7) - (-6) = -5\dots\dots7\dots\dots6 = \dots\dots$

5 $(-2) \cdot (-3) \cdot (+3) = (+\dots\dots) \cdot (+3) = \dots\dots$ $\quad$ $(-2) \cdot (+3) \cdot (-4) = (-\dots\dots) \cdot (-4) = +\dots\dots$

6 $(-30) : (-15) : (-2) = (+\dots\dots) : (-2) = \dots\dots1$ $\quad$ $(-100) : (-20) : (-5) = (\dots\dots5) : (-5) = -\dots\dots$

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a semplificare alcune espressioni numeriche.

7

Passi del procedimento	**Semplificare l'espressione:** $\mathbf{2 \cdot (-3)^2 : 6 - (-2)^2 \cdot (-3) + 10 - 9 + (-88) : (-11) : (-4) =}$
Esegui le potenze.	$= 2 \cdot (+9) : 6 - (\dots\dots) \cdot (-3) + 10 - 9 + (-88) : (-11) : (-4) =$
Esegui moltiplicazioni e divisioni, nell'ordine in cui compaiono.	$= 18 : 6 - (\dots\dots) + 10 - 9 + (+\dots\dots) : (-4) =$
Esegui le divisioni rimaste.	$= 3 - (\dots\dots) + 10 - 9 + (\dots\dots) =$
Esegui la somma algebrica rimasta.	$= 3 + \dots\dots + 10 - 9 - \dots\dots = \dots\dots$

8

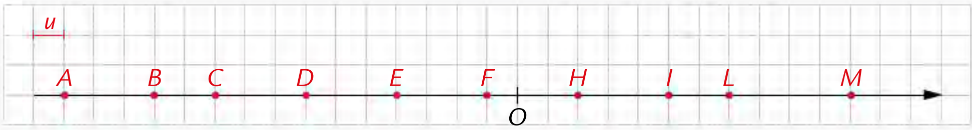
Passi del procedimento	**Semplificare l'espressione:** $[(-\mathbf{2})^{\mathbf{4}}]^{\mathbf{3}} : [(-\mathbf{2})^{\mathbf{3}} \cdot (-\mathbf{2})^{\mathbf{7}}] + [(-\mathbf{2})^{\mathbf{5}}]^{\mathbf{2}} : [(-\mathbf{2})^{\mathbf{8}} \cdot (-\mathbf{2})^{\mathbf{2}}] =$
Applica la proprietà della potenza di potenza.	$= (-2)^{12} : [(-2)^3 \cdot (-2)^7] + (-2)^{\dots} : [(-2)^8 \cdot (-2)^2] =$
Applica la proprietà del prodotto di potenze con la stessa base.	$= (-2)^{12} : (-2)^{10} + (-2)^{\dots} : (-2)^{\dots} =$
Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.	$= (-2)^{\dots} + (-2)^{0} =$
Calcola le potenze.	$= \dots\dots + \dots\dots = \dots\dots$

9

Passi del procedimento	**Semplificare l'espressione:** $[(-\mathbf{3})^{\mathbf{5}}]^{\mathbf{3}} : [(-\mathbf{3})^{\mathbf{3}} \cdot (+\mathbf{3})^{\mathbf{8}}] =$
Osserva che è possibile riscrivere l'espressione in forma equivalente in modo che tutte le potenze abbiano la stessa base, così da poter utilizzare le proprietà delle potenze.	$= [(-3)^5]^3 : [(-3)^3 \cdot (-3)^8] =$
Applica la proprietà della potenza di potenza e del prodotto di potenze con la stessa base.	$= (-3)^{\dots} : (-3)^{\dots} =$
Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.	$= (-3)^{\dots} =$
Calcola la potenza.	$= \dots\dots$

Esercizi da svolgere

1 Scrivi i numeri corrispondenti ai punti indicati sulla retta orientata.



2 Completa la seguente tabella.

Numero	−12	+30	0	−67	−1	+1	+32	−3	+4
Valore assoluto	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

3 -15 ..... $+8$ $\qquad$ $+76$ ..... $+60$

4 -8 ..... -12 $\qquad$ -9 ..... $+9$

5 0 ..... $+7$ $\qquad$ -23 0

6 $+11$ ..... $+101$ $\qquad$ -26 ..... -203

7 -13 ..... -28 $\qquad$ $+16$ ..... -20

8 -12 ..... -12 $\qquad$ -23 ..... $+23$

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni.

9 $9+(-52)+(+76)+(-14)+(-9)+(+50)$ [60]

10 $(-37)+(+87)+(+29)+(+37)+(-56)$ [60]

11 $(12-23+18)+(9-18+24)-(36-25+17)$ [−6]

12 $(-43+35+13)-(23-28-19+12)+(6-35+12)$ [0]

Completa le seguenti uguaglianze.

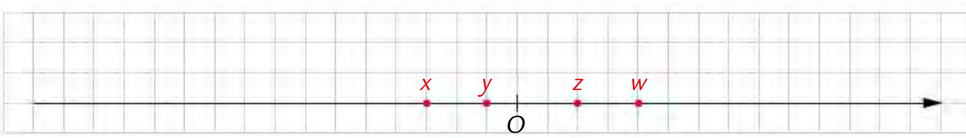
13 $(-23)+(\ldots\ldots)=+18$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)+(+11)=-21$

14 $(-45)+(\ldots\ldots)=-12$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)+(-18)=-19$

15 $(-23)-(\ldots\ldots)=+15$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)-(+13)=-17$

16 $(-54)-(\ldots\ldots)=-18$ $\qquad$ $(\ldots\ldots)-(-25)=-19$

17 Sulla retta reale sono rappresentati i numeri x, y, z e w. Inserisci sulla stessa retta i numeri:
$2x$, $2w$, $-3z$, $x-y$, $x-z$, $z+w$.



Completa le seguenti tabelle.

18

a	0	−1	+23	−15	−30	+25	−64	+41	+17	−80	+35	1
b	−7	98	+20	−16	+27	−36	0	−10	−1	−54	1	−59
$a \cdot b$	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

19

a	0	−188	+240	−156	−340	+285	−64	+41	−17	−80	+35	−59
b	−7	47	+20	−13	+17	−19	0	−41	−17	−16	1	−1
$a : b$	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....	....

Completa le seguenti uguaglianze.

20 $(-84) : (\dots\dots) = +12$ $\qquad$ $(\dots\dots) : (-11) = -12$

21 $(-95) : (\dots\dots) = -5$ $\qquad$ $[(-8) + (\dots\dots)] : (+14) = +3$

22 $(\dots\dots) \cdot (-8) : (-7) = 16$ $\qquad$ $(-27) : [(7 - (\dots\dots)] = 9$

23 $(\dots\dots) : (-13) \cdot (+5) = 35$ $\qquad$ $(-36) \cdot (\dots\dots) : (+45) = 0$

24 $(\dots\dots) : (-14) \cdot (-45) = 45$

Esegui le seguenti operazioni.

25 $(-10)^3 : 5^2$ $\qquad$ $(-3)^4 + 2^4$ $\qquad$ [−40, 97]

26 $(-10)^3 : 5^3$ $\qquad$ $2^5 \cdot (-5)^2$ $\qquad$ [−8, 800]

27 $(-5)^3 - (+3)^3$ $\qquad$ $(-8 \cdot 3)^2$ $\qquad$ [−152, 576]

28 $(-2)^3 \cdot 4^2$ $\qquad$ $(-15 + 11)^0$ $\qquad$ [−128, 1]

29 $(-10 + 4)^3$ $\qquad$ $[2^2 \cdot (-3)]^2$ $\qquad$ [−216, 144]

Calcola il valore delle seguenti espressioni in Z applicando, dove possibile, le proprietà delle potenze.

30 $[4 + (-3)(-7)] : (-5) - (-10)$ $\qquad$ [5]

31 $[3 - (-2)(+3) + (-10) : (-2) - (4 - 8)] : [-8 + (-2 + 4)]$ $\qquad$ [−3]

32 $\{-5 - [3 - (-2)(+3) + (-2)(-2)]\} : (-3) - (-6)$ $\qquad$ [12]

33 $-4 - 4 \cdot [54 : (-18) - (50 - 34) : (-8) \cdot 2 + 6 \cdot (-4)] : (-46)$ $\qquad$ [−6]

34 $[(65 - 12 \cdot 4 - 25 : 5) : 4 - (-36) : (-9) \cdot 2] \cdot (-2) + 24 : (-3)$ $\qquad$ [2]

35 $[-13 \cdot 4 : (-26) - (-15) \cdot 2] : (-8) \cdot [(-15 + 32 - 29) : (-6)]$ $\qquad$ [−8]

36 $-14 + 14 : \{13 - 13 : [51 - (10 \cdot 9 - 8 \cdot 7 + 6 \cdot 5)]\} - 65 : (-5)$ $\qquad$ [0]

37 $[(-10)^{17} : (-10)^{14}]^2 : (-10^2)^2 - (-10)^0$ $\qquad$ [99]

38 $|-6|^3 : (-2)^3 - |-8|^2 : (-2)^2$ $\qquad$ [−43]

39 $[(-2)^{12} : (-2)^7] : (-2)^3 + [(-2)^{10} : (-2)^3] : (-2)^4$ $\qquad$ [−4]

40 $\left\{[(-3)^3 + (-10)(-2)]^4\right\}^2 : [(-7)^4 \cdot (-7)^2]$ $\qquad$ [49]

41 $[(-8)^3 : (-64) - (-2)^2]^5 : (-4)^4$ $\qquad$ [4]

42 $(-5)^7 \cdot (-5)^8 : [(+5)^2]^7 - (-4)^6 \cdot (-4)^3 : (+4)^8$ $\qquad$ [−1]

43 $[(-8)^2]^2 : [(-4)^2 \cdot (-|-4|)^3] : \left\{[(+2)^5]^2 : [(-2)^3]^3\right\}$ $\qquad$ [2]

Sintesi visuale

Frazione e frazione ridotta ai minimi termini

Siano a e b numeri naturali con $b \neq 0$; si dice frazione una espressione del tipo $\frac{a}{b}$ che indica il quoziente esatto della divisione tra a e b. Se il massimo comune divisore tra a e b è 1, la frazione si dice **ridotta ai minimi termini**.

ESEMPI

Sono frazioni ridotte ai minimi termini: $\frac{5}{3} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{7}{9}$

Non sono frazioni ridotte ai minimi termini: $\frac{15}{3} \quad \frac{24}{8} \quad \frac{12}{9}$

Frazioni equivalenti

Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono equivalenti, e si scrive $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e solo se $a \cdot d = b \cdot c$.

ESEMPI

Sono equivalenti: $\frac{3}{4}$ e $\frac{15}{20}$ — $3 \cdot 20 = 4 \cdot 15$

Non sono equivalenti: $\frac{3}{4}$ e $\frac{9}{16}$ — $3 \cdot 16 \neq 4 \cdot 9$

Confronto di frazioni

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

rispettivamente a seconda che:

$ad < bc \qquad ad = bc \qquad ad > bc$

ESEMPI

$\frac{5}{4} > \frac{8}{7}$ perché $5 \cdot 7 > 8 \cdot 4$

$\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$ perché $3 \cdot 5 < 4 \cdot 4$

Proprietà invariantiva

$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : n}{b : n}$

n deve essere divisore di *a* e di *b*

ESEMPI

$\frac{5}{3} = \frac{5 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{20}{12} \qquad \frac{81}{12} = \frac{81 : 3}{12 : 3} = \frac{27}{4}$

Metodi per esprimere una frazione in forma decimale e viceversa

Obiettivo	Metodo	ESEMPI
Trasformare una frazione in un numero decimale	Si esegue la divisione tra numeratore e denominatore.	$\frac{7}{4} = 7 : 4 = 1{,}75$ 7 | 4 ; 30 | 1,75 ; 20 ; 0
Trasformare un numero decimale finito in frazione	Si scrive una frazione che ha: • al numeratore il numero scritto senza la virgola; • al denominatore un 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre dopo la virgola.	$1{,}25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4}$ $5{,}4 = \frac{54}{10} = \frac{27}{5}$
Trasformare un numero decimale periodico in frazione	Si scrive una frazione che ha: • per numeratore la differenza fra il numero scritto senza la virgola e la parte che viene prima del periodo; • per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo, seguiti da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (se c'è).	$1{,}\overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ $0{,}1\overline{05} = \frac{105-10}{900} = \frac{95}{900} = \frac{19}{180}$

Proporzione

È un'uguaglianza di due rapporti.

$a : b = c : d$ equivale a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ESEMPIO
$2 : 3 = 4 : 6$ equivale a $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Proprietà fondamentale delle proporzioni:

$\overbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{medi}} : d}^{\text{estremi}}$ se e solo se $\underbrace{a \cdot d = b \cdot c}_{\text{il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medi}}$

ESEMPIO
$2 : x = 8 : 4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2 \cdot 4 = 8 \cdot x \Leftrightarrow x = 1$

Percentuale

Il simbolo $x\%$ equivale a $\frac{x}{100}$.

Percentuale → Frazione → Numero decimale

ESEMPIO
$15\% = \frac{15}{100} = 0{,}15$

Definizione di percentuale

Passaggio da frazione a numero decimale

Frazione → Percentuale → Numero decimale

ESEMPIO
$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{60}{100} = 60\% = 0{,}6$

Definizione di percentuale

Passaggio da una frazione a una equivalente con denominatore 100 tramite l'utilizzo della proprietà invariantiva

Approssimazioni di numeri decimali

Approssimazione per troncamento	Approssimazione per arrotondamento
Approssimare un numero **per troncamento**, arrestandosi alla k-esima cifra decimale, significa scrivere il numero fino alla k-esima cifra decimale, sopprimendo tutte le cifre successive.	Per approssimare un numero **per arrotondamento**, arrestandosi alla k-esima cifra decimale, occorre considerare la cifra immediatamente successiva (a destra) alla k-esima: • se essa è minore di 5, la si trascura, insieme a tutte quelle che la seguono, lasciando la k-esima cifra invariata; • se essa è maggiore o uguale a 5, la si trascura, insieme a tutte quelle che la seguono, aumentando di una unità la k-esima cifra.
ESEMPIO Consideriamo il numero: 3,462668 Allora: • 3,4 è l'approssimazione per troncamento alla prima cifra decimale, cioè a meno di un decimo; • 3,46 è l'approssimazione per troncamento alla seconda cifra decimale, cioè a meno di un centesimo.	**ESEMPIO** Consideriamo il numero: 3,462668 Allora: • 3,5 è l'approssimazione per arrotondamento alla prima cifra decimale, cioè a meno di un decimo; • 3,46 è l'approssimazione per arrotondamento alla seconda cifra decimale, cioè a meno di un centesimo.

Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a ridurre le frazioni date ai minimi termini.

1 $\frac{36}{48} = \frac{36 : 12}{48 : 12} = \frac{.....}{.....}$ $\qquad \frac{30}{54} = \frac{30 : 6}{54 : 6} = \frac{.....}{.....}$

2 $\frac{99}{81} = \frac{99 : .....}{81 : .....} = \frac{.....}{.....}$ $\qquad \frac{45}{120} = \frac{45 : .....}{120 : .....} = \frac{.....}{.....}$

Completa inserendo il simbolo opportuno (<, =, >).

3 $\frac{5}{4}$ ..... $\frac{6}{7}$ perché $5 \cdot 7$ ..... $4 \cdot 6$

4 $\frac{4}{5}$ ..... $\frac{6}{7}$ perché $4 \cdot 7$ ..... $5 \cdot 6$

5 $\frac{2}{22}$ ..... $\frac{3}{33}$ perché $2 \cdot 33$ ..... $22 \cdot 3$

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a determinare le frazioni generatrici dei numeri decimali periodici indicati.

6 $3,\overline{2} = \frac{32 - ....}{9} = \frac{..........}{..........}$

7 $1,0\overline{2} = \frac{.......... - 10}{90} = \frac{..........}{..........} = \frac{..........}{..........}$

8 $4,\overline{27} = \frac{427 - 4}{..........} = \frac{..........}{..........} = \frac{..........}{..........}$

- Al numeratore: la differenza tra il numero scritto senza la virgola e la parte che precede il periodo
- Al denominatore: tanti 9 quante le cifre del periodo e tanti 0 quante quelle dell'antiperiodo

9 Completa la seguente tabella, sulla base degli esempi svolti in rosso.

Rappresentazione decimale	Rappresentazione tramite frazione ridotta ai minimi termini	Rappresentazione percentuale
0,65	$\frac{65}{100} = \frac{13}{20}$	65%
0,12 ← Conviene prima scrivere la rappresentazione percentuale e poi dedurre questo valore dalla rappresentazione in percentuale	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 12\%$
0,16	$\frac{16}{100} = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$	16%
1,2	....	....
....	$\frac{7}{20}$	....
....	....	7,5%

10 Completa, in modo da ricavare il termine incognito di ciascuna proporzione.

a. $4 : x = 6 : 12 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{proprietà fondamentale delle proporzioni}} \quad 4 \cdot 12 = 6 \cdot x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6 \cdot ....}{..........} = ...$

b. $(x + 2) : x = 10 : 5 \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{proprietà fondamentale delle proporzioni}} \quad 5 \cdot (x + 2) = 10 \cdot x \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{proprietà distributiva}} \quad 5x + ... = ... \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{risolvi come equazione, come hai imparato alla scuola media}} \quad 5x = ... \quad \Rightarrow \quad x = ...$

11 Completa le approssimazioni seguenti.

a. 1,4567 arrotondato alla 3 cifra decimale $\Rightarrow$ 1,457

poiché la quarta cifra decimale è 7, maggiore di 5, la terza cifra decimale va aumentata di 1

b. 1,4563 arrotondato alla 3 cifra decimale $\Rightarrow$ 1,45.....

poiché la quarta cifra decimale è 3, minore di 5, la terza cifra decimale resta invariata

c. 5,4678 arrotondato alla 2 cifra decimale $\Rightarrow$ ....

d. 5,6433 arrotondato alla 2 cifra decimale $\Rightarrow$ ....

Problemi e modelli

Completa la risoluzione dei seguenti problemi.

12 Nel negozio Spendibene ogni articolo di abbigliamento è scontato del 20%. Marta deve acquistare una polo da 45 euro e una t-shirt da 30 euro di listino. Nel negozio Spendimeglio la polo è venduta a 35 euro e la t-shirt a 25 euro. Qual è l'acquisto più conveniente?

Soluzione

Quanto costa la polo nel negozio Spendibene? 45 € · .... = ... €

Quanto costa la t-shirt nel negozio Spendibene? 30 € · .... = ... €

Confrontando le cifre ottenute, si può dedurre che l'acquisto migliore consiste nel comprare la polo nel negozio .... e la t-shirt nel negozio ....

13 Un capo di abbigliamento, che costava inizialmente 150 euro, dopo uno sconto costa 120 euro. A quanto ammonta lo sconto, in percentuale?

Soluzione

Lo sconto che è stato praticato sul prezzo originario di 150 euro è di 150 − 120 = 30 (euro); per calcolare la percentuale corrispondente devi trasformare la frazione $\frac{30}{150}$ in percentuale:

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{\dots\dots} = \frac{1 \cdot \dots\dots}{\dots\dots \cdot \dots\dots} = \frac{\dots\dots}{100}$$

Utilizzando la proprietà invariantiva trasforma la frazione in una equivalente con denominatore 100

Pertanto lo sconto praticato equivale al ....

14 Un capo di abbigliamento, dopo uno sconto del 30%, viene venduto a 140 euro. Qual era il prezzo prima dello sconto?

Soluzione

Poiché lo sconto è del 30%, il prezzo scontato equivale al 70% del prezzo x originario. Vale quindi la proporzione: $140 : 70 = x : 100$, da cui $x =$ ....

15 Su un capo di abbigliamento viene effettuato prima un ribasso del 10% e poi sul prezzo scontato un ulteriore ribasso del 10%. Di quale percentuale risulta scontato il prezzo finale rispetto a quello iniziale?

Soluzione

Indichiamo con p il prezzo originario; dopo un ribasso del 10% il prezzo diviene il 90%, quindi $\frac{90}{100}p$; dopo un ulteriore ribasso del 10% il prezzo scontato diviene a sua volta il 90%, quindi diviene uguale a:

$$\frac{90}{100} \cdot \underbrace{\left(\frac{90}{100}p\right)}_{\text{prezzo dopo il primo sconto}} = \underbrace{\frac{\dots\dots}{100}p}_{\text{prezzo dopo i due sconti}}$$

In definitiva il prezzo finale equivale all'...............% del prezzo originario, quindi lo sconto rispetto al prezzo iniziale è del ....%.

Insieme Q e operazioni in Q

Sintesi visuale

Numero razionale assoluto

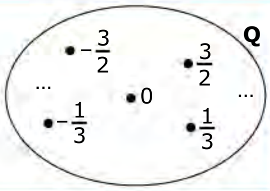
Insieme di tutte le frazioni equivalenti a una frazione data.

ESEMPI

$\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{15}{12}$ sono rappresentazioni diverse dello stesso numero razionale definito dall'insieme $\left\{\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{15}{12}, \dots\right\}$

Insieme Q dei numeri razionali

Insieme costituito dal numero zero e da tutti i numeri che si ottengono associando a ciascun numero razionale assoluto due numeri, uno **positivo** preceduto dal segno + e uno **negativo** preceduto dal segno –.



Operazioni tra numeri razionali assoluti, espressi da frazioni

Operazione	Come è definita	ESEMPI
Addizione e sottrazione	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{(\text{m.c.m.}(b,d):b)\cdot a \pm (\text{m.c.m.}(b,d):d)\cdot c}{\text{m.c.m.}(b,d)}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{3\cdot 3+4\cdot 1}{12}=\frac{13}{12}$
Moltiplicazione	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{3}=\frac{35}{18}$
Divisione	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ — Reciproco di $\frac{c}{d}$	$\frac{1}{5}:\frac{3}{2}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$

Operazioni tra numeri razionali (relativi)

Le regole di calcolo tra numeri razionali assoluti si estendono nell'insieme **Q** dei numeri razionali, applicando le stesse regole dei segni viste in **Z**.

ESEMPI

$-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{-4+3}{12}=-\frac{1}{12}$

$- \cdot + = -$

$\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(+\frac{5}{2}\right)=-\frac{15}{8}$

$- \cdot - = +$

$\left(-\frac{3}{4}\right):\left(-\frac{5}{2}\right)=\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)=+\frac{3}{10}$

Si trasforma in moltiplicazione, scrivendo il reciproco del divisore

Potenze nell'insieme dei numeri razionali

Le potenze con esponente positivo o nullo sono definite nell'insieme dei numeri razionali in modo analogo a quanto visto in **Z**; in **Q** si definiscono anche le potenze con esponente negativo.

Potenza a esponente intero negativo	ESEMPI
$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n$ con $a \neq 0$, $n \in \mathbf{N} - \{0\}$	Esponente opposto $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}=(-3)^{+3}=-27$ Base reciproca $\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}=\frac{9}{16}$

Esercizi guidati

1 Nelle seguenti tabelle esegui le operazioni indicate, seguendo i passi descritti nella prima colonna e l'esempio svolto nella seconda colonna.

Passi del procedimento	$\frac{5}{12}-\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}+\frac{7}{35}$	$\frac{7}{6}-\frac{2}{3}$
Calcola il *minimo comune multiplo* dei denominatori delle frazioni.	m.c.m.(12, 15) = 60	....	....
Applica la regola relativa alla sottrazione (questo passaggio di solito si fa mentalmente).	$\frac{5}{12}-\frac{4}{15}=\frac{(60:12)\cdot 5-(60:15)\cdot 4}{60}=$	....	....
Esegui i calcoli al numeratore della frazione scritta al passo precedente.	$=\frac{25-16}{60}=\frac{9}{60}=$	....	....
Se è possibile, riduci la frazione ottenuta ai minimi termini.	$=\frac{3}{20}$	....	....

Passi del procedimento	$\left(-\frac{36}{15}\right)\cdot\left(-\frac{35}{16}\right)$	$\left(+\frac{9}{25}\right)\cdot\left(+\frac{35}{12}\right)$	$\left(+\frac{24}{25}\right)\cdot\left(-\frac{35}{42}\right)$
Come in **Z**, il prodotto di due numeri razionali ha *segno* uguale a quello che si ottiene applicando la regola dei segni e *valore assoluto* uguale al prodotto dei valori assoluti.	$=+\left(\frac{36}{15}\cdot\frac{35}{16}\right)=$	....	....
Se possibile, semplifica «in croce».	$=+\left(\frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{25}_{5}}\cdot\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{16}_{4}}\right)=$	....	....
Moltiplica i numeratori e i denominatori.	$=+\frac{9\cdot 7}{5\cdot 4}=+\frac{63}{20}$	....	....

Passi del procedimento	$\left(-\frac{6}{25}\right):\left(+\frac{16}{35}\right)$	$\left(-\frac{8}{20}\right):\left(-\frac{6}{25}\right)$	$\left(+\frac{22}{25}\right):\left(+\frac{33}{10}\right)$
Come in **Z**, il quoziente di due numeri razionali ha *segno* uguale a quello che si ottiene applicando la regola dei segni e *valore assoluto* uguale al quoziente dei valori assoluti.	$=-\left(\frac{6}{25}:\frac{16}{35}\right)=$	....	....
Trasforma la divisione in moltiplicazione per il reciproco.	$=-\left(\frac{6}{25}\cdot\frac{35}{16}\right)=$	....	....
Se possibile, semplifica «in croce» ed esegui la moltiplicazione.	$=-\left(\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{25}_{5}}\cdot\frac{\cancel{35}^{7}}{\cancel{16}_{8}}\right)=-\frac{21}{40}$	....	....

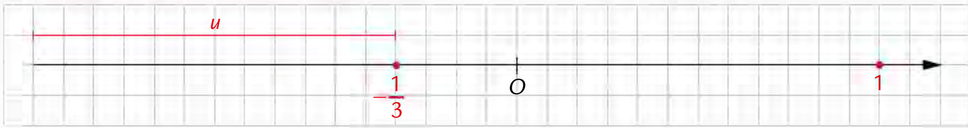
Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a calcolare alcune potenze.

2 $\left(-\frac{3}{2}\right)^2=+\ldots$ $\quad (-2)^{-3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\ldots$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2=\ldots$ $\quad \left(-\frac{1}{3}\right)^3=\ldots$

3 $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}=\left(-\frac{\ldots}{\ldots}\right)^2=\ldots$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4=+\frac{1}{\ldots}$ $\quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}=(-\ldots)^3=-\ldots$ $\quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}=\ldots$

4 Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri razionali:

$-\frac{7}{6}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, 0, $+\frac{1}{4}$, $+\frac{7}{12}$, $+\frac{3}{4}$, +1. Alcuni numeri sono rappresentati come esempio.



5 Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$2^{-10} = (-10)^2$	No	$2^{-10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$
$2^{-10} \cdot 2^{-2} = 2^{-12}$	....	....
$(2^{-3})^{-2} = 2^6$	....	....
$(2^{-8} + 2^{-6}) : 2^{-4} = 2^{-12} + 2^{-2}$	....	....

6 Completa la seguente tabella, sulla base dell'esempio svolto nella seconda riga.

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^3$	a^2+b^2	$a^{-3}+b^{-3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{3+2}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$	$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{3-2}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{9} = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 2^3 + 3^3 = 8 + 27 = 35$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	....	....	....	....
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	....	....	....	....

Problemi e modelli **Completa la risoluzione dei seguenti problemi.**

7 L'aria è composta per i $\frac{39}{50}$ da azoto e per i $\frac{21}{100}$ da ossigeno. Quale frazione rappresenta gli altri gas? Quanti dm^3 di ossigeno ci sono in una stanza di 60 m^3?

Soluzione

Scrivi e semplifica l'espressione che ti permette di trovare la frazione che rappresenta i gas rimanenti. ....

Quanti dm^3 di ossigeno ci sono in 1 m^3 di aria? ....

Scrivi ed esegui il calcolo necessario a trovare quanti dm^3 di ossigeno ci sono nella stanza.

....

$\left[\frac{1}{100};\ 12\,600\ dm^3\right]$

8 Si aggiungono 800 g di cemento in un secchio che ne contiene già 3000 g. Di quanto aumenta il volume occupato dal cemento nel secchio, sapendo che 2,4 g di cemento occupano 1 cm^3?

Soluzione

Poiché 2,4 g occupano 1 cm^3, 800 g occuperanno $\frac{800}{2,4}$ $cm^3 \simeq$ .... cm^3 (arrotonda il risultato alla prima cifra decimale). Quindi il volume occupato dal cemento aumenta di ....

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

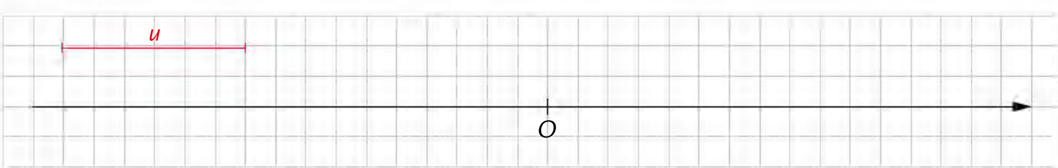
Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
confondere l'opposto di un numero con il suo reciproco	**1.** l'opposto di 3 è $\frac{1}{3}$ **2.** il reciproco di $-\frac{2}{5}$ è $\frac{2}{5}$ Errato!	**1.** l'opposto di 3 è -3 **2.** il reciproco di $-\frac{2}{5}$ è $-\frac{5}{2}$ Corretto
eseguire le addizioni sommando i numeratori e i denominatori	$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{5+7}=\frac{5}{12}$ Errato!	$\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{2\cdot 7+3\cdot 5}{35}=\frac{29}{35}$ Corretto
dimenticare di ridurre le frazioni ai minimi termini prima di eseguire le operazioni (non è un errore ma complica i calcoli)	$\frac{16}{18}+\frac{5}{9}=\frac{16+10}{18}=\frac{26}{18}$ Non conveniente	$\frac{16}{18}+\frac{5}{9}=\frac{8}{9}+\frac{5}{9}=\frac{13}{9}$ Corretto
calcolare il denominatore comune tra frazioni moltiplicando i loro denominatori, anziché scegliere il loro m.c.m. (non è un errore ma complica i calcoli)	$\frac{3}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=$ $=\frac{54\cdot 3+24\cdot 2-36}{216}=\frac{174}{216}$ Non conveniente	$\frac{3}{4}+\frac{2}{9}-\frac{1}{6}=$ $=\frac{9\cdot 3+4\cdot 2-6}{36}=\frac{29}{36}$ Corretto
semplificare in modo scorretto le frazioni, quando si eseguono addizioni	$\frac{2+\cancel{3}}{\cancel{9}}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$ Errato!	$\frac{2+3}{9}=\frac{5}{9}$ Corretto
confondere il segno della base di una potenza con il segno del suo esponente, quando l'esponente è negativo	**1.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=-\frac{8}{27}$ **2.** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=-\frac{9}{4}$ Errato!	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{3}=\frac{27}{8}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{9}{4}$ Corretto
eseguire in modo errato le divisioni di potenze con la stessa base, quando l'esponente del divisore è negativo	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5-4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-9}$ Errato!	$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5}:\left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5-(-4)}=$ $=\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}=-2$ Corretto

1 Disponi in ordine crescente i seguenti numeri razionali:

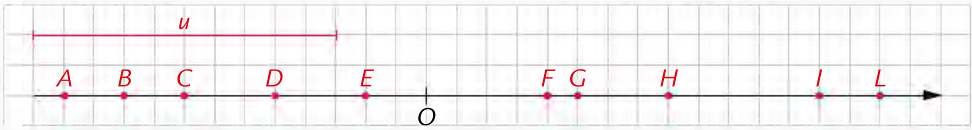
$$-\frac{5}{2}\quad +\frac{3}{4}\quad -2\quad -\frac{2}{3}\quad +\frac{1}{2}\quad -\frac{4}{5}\quad +\frac{1}{4}\quad +1\quad +\frac{4}{3}\quad +\frac{8}{7}$$

2 Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri razionali:

$$-\frac{3}{2}\quad +\frac{7}{3}\quad +\frac{5}{6}\quad -2\quad 0\quad +\frac{5}{2}\quad -\frac{8}{3}\quad +\frac{1}{3}\quad +\frac{11}{6}$$



3 Associa a ogni punto indicato il numero razionale corrispondente.



Completa inserendo il simbolo corretto (<, =, >).

4 $-\frac{8}{5}$ ..... $\frac{11}{7}$; $-\frac{8}{5}$ ..... $-\frac{11}{7}$; $\frac{8}{5}$ ..... $\frac{11}{7}$

5 $\frac{8}{5}$ ..... $-\frac{11}{7}$; $\frac{20}{31}$ ..... $-\frac{30}{47}$; $-\frac{20}{31}$ ..... $\frac{30}{47}$

6 $\frac{20}{31}$ ..... $\frac{30}{47}$; $-\frac{20}{31}$ ..... $-\frac{30}{47}$; $\frac{70}{56}$ ..... $\frac{65}{52}$

7 $\frac{70}{56}$ ..... $-\frac{65}{52}$; $-\frac{70}{56}$ ..... $-\frac{65}{52}$; $-\frac{70}{56}$ ..... $\frac{65}{52}$

8 Completa in modo da ottenere uguaglianze corrette.

$\left(-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(\dots\dots\right)=-\frac{2}{3}$ $\qquad$ $\left(\dots\dots\right):\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{2}{15}$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{10}\right)\cdot\left(\dots\dots\right)=-100$

9 Completa la seguente tabella.

a	$-\frac{5}{3}$	$+\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$
b	0	1	−1	2	−2
c	−6	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	+4	$-\frac{1}{2}$
$a+b$	....	....	....	....	....
$(a+b)\cdot c$	....	....	....	....	....
$(a+b):c$	....	....	....	....	....
a^b	....	....	....	....	....
c^b	....	....	....	....	....
a^b-c^b	....	....	....	....	....

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

10 $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{7}{6}$ $\quad[1]$

11 $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right]\left(-\frac{3}{14}\right)+\frac{7}{8}$ $\quad\left[\frac{1}{2}\right]$

12 $\left[\left(-\frac{6}{5}\right)\left(+\frac{25}{9}\right)-\frac{1}{2}\right]:\left(-\frac{46}{9}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}$ $\quad[2]$

13 $\left[0,\overline{6}\cdot\left(2-\frac{4}{5}\right)-\left(1-\frac{2}{5}-0,25\right)\cdot\frac{4}{7}\right]:1,8$ $\quad\left[\frac{1}{3}\right]$

14 $\left[\left(-\frac{5}{7}\right):\left(-\frac{30}{21}\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]:\left[\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)-\left(2-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\right)\right]$ $\quad[-4]$

15 $\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{19}{15}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right):\left(\frac{1}{4}+1-\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{16}{5}+\frac{3}{10}\right):\left(-\frac{7}{4}\right)$ $\quad[-1]$

16 $\frac{5}{6}-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{13}{21}-\frac{11}{14}\right):\left\{-\frac{17}{15}+\frac{3}{7}\cdot\left[\frac{4}{5}-\frac{3}{62}\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{13}{10}-\frac{1}{15}\right)\right]\right\}-\frac{2}{35}\cdot\left(\frac{9}{4}-4\right)$ $\quad\left[\frac{4}{5}\right]$

17 $\left\{\left[-\frac{21}{52}\cdot\left(\frac{65}{84}+\frac{91}{28}+\frac{13}{42}\right)-\frac{25}{6}\cdot\frac{11}{35}:\left(-\frac{10}{7}\right)\right]:\left(4-\frac{21}{4}\right)-\frac{1}{12}\right\}\cdot\left(\frac{10}{7}-2\right)$ $\quad\left[-\frac{1}{3}\right]$

Calcola il valore delle seguenti espressioni applicando, ovunque possibile, le proprietà delle potenze.

18 $[(10^5 \cdot 10^4) : (10^4)^2]^{-2}$ $\left[\frac{1}{100}\right]$

20 $\dfrac{2^{-1}+3^{-1}}{2^{-1}-3^{-1}}$ $[5]$

19 $\{[(10^3 \cdot 10^4)^{-2} \cdot (10^2)^{10}] : 10^5\}^{-1}$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

21 $(2^{-1}-5^{-1})\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $[-15]$

22 $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 : \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^4$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

23 $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^7 : \left(-\frac{1}{3}\right)^4\right]^2 : \left[\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]$ $\left[\frac{1}{9}\right]$

24 $\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{8}\right]\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)^{-2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

25 $\frac{3}{4}+\frac{3}{4}:\left[\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{26}+\frac{5}{39}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^0-\left(\frac{1}{2}\right)^1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$ $\left[\frac{11}{4}\right]$

26 $\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^3\right]^2 : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{11} : \left(-\frac{2}{3}\right)^5\right] + \left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^6\left(-\frac{1}{2}\right)^5\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4\right]^2\right\}^{-1}$ $[-7]$

27 $\left\{\left[\left(3-\frac{8}{3}\right)^{-4}\right]^{-3}\cdot\left(-2+\frac{5}{3}\right)^{-2}\right\} : \left[\left(7-\frac{20}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} : \left(1-\frac{2}{3}\right)^{-3}\right]^2$ $\left[\frac{1}{9}\right]$

28 $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}\left(-1-\frac{2^{-1}}{3}\right)-2\left(\frac{1}{2}-2\right)^3\right] : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left[1+\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}\right]^{-1}$ $\left[-\frac{11}{2}\right]$

Problemi e modelli

29 Il proprietario di un terreno di 12 500 m² destina $\frac{3}{10}$ della proprietà alla coltivazione del grano, $\frac{1}{5}$ a vigneto e il rimanente a frutteto. Quanti m² sono destinati al frutteto? [6250 m²]

30 Un commerciante ha acquistato 840 kg di merce pagandola complessivamente 2100 euro. Se vuole realizzare un guadagno uguale a $\frac{1}{5}$ della spesa, a quanto deve vendere 1 kg di quella merce? [3 euro]

31 Si deve dividere un listello di legno di 140 cm in due parti di cui una sia $\frac{2}{5}$ dell'altra. Quanto deve essere lunga ciascuna parte? [40 cm e 100 cm]

32 L'angström (Å) è un'unità di misura uguale a $1 \cdot 10^{-10}$ m. Calcola la misura in metri del diametro di un globulo rosso, sapendo che vale $8 \cdot 10^4$ Å. [$8 \cdot 10^{-6}$ m]

33 I signori Rossi abitano nell'appartamento di loro proprietà, intestato per metà a ciascuno dei due. Poiché hanno tre figli, alla morte del signor Rossi la moglie eredita $\frac{1}{3}$ della proprietà del marito e ciascun figlio $\frac{1}{3}$ del rimanente. Quale frazione dell'appartamento risulta di proprietà della moglie? Quale di proprietà di ciascun figlio?
Uno dei figli vende la sua quota in parti uguali alla madre e agli altri due fratelli. Dopo la vendita, qual è la parte della madre? Quale quella di ciascuno degli altri due figli? $\left[\frac{2}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{19}{27};\ \frac{4}{27}\right]$

34 Giovanni ha acquistato un terreno pagando alla consegna € 6000, cioè $\frac{3}{10}$ del suo prezzo, e il resto in rate da € 1750 l'una. Con quante rate estinguerà il suo debito? [8]

35 La massa della stella Sirio A è $4{,}284 \cdot 10^{30}$ kg e la massa del Sole è $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg. Quante volte è maggiore la massa di Sirio A rispetto a quella del Sole? [Circa 2,15 volte più grande]

Lezione 6 A

Insiemi e operazioni tra insiemi

Sintesi visuale

Insiemi

Insieme

In matematica, un **insieme** è un raggruppamento di oggetti per cui è possibile stabilire, senza ambiguità, se un oggetto appartiene o meno al raggruppamento. Per indicare che un oggetto appartiene (non appartiene) a un certo insieme si utilizza il simbolo $\in$ ($\notin$).

ESEMPI

Definisce un insieme:
il raggruppamento dei numeri naturali maggiori di 1000. Se indichiamo tale insieme con A, possiamo scrivere:
$1002 \in A$, $800 \notin A$

Non definisce un insieme:
il raggruppamento dei numeri naturali "molto grandi", perché non è precisato un criterio in base al quale un numero è da considerarsi "grande".

si può rappresentare in tre modi

Elencazione

Elencando esplicitamente gli elementi dell'insieme, separati da una virgola (o da un punto e virgola), all'interno di due parentesi graffe.

ESEMPIO

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ →

Proprietà caratteristica

Rappresentando l'insieme tramite una scrittura del tipo:

$$\{\underbrace{x \in U}_{\text{l'insieme } U \text{ è l'insieme ambiente (o universo)}} \; \underbrace{|}_{\text{significa «tale che»}} \; \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{al posto dei puntini si specifica la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme}}\}$$

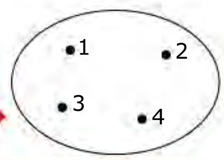
ESEMPIO

$A = \{x \in \mathbf{N} \mid 1 \leq x < 5\}$ →

Diagramma di Venn

Rappresentando gli elementi di un insieme come punti all'interno di una linea chiusa.

ESEMPIO



■ **ATTENZIONE**

Non sempre è possibile rappresentare un dato insieme in tutte e tre le forme di rappresentazione indicate.

Sottoinsiemi

Sottoinsieme

Dati due insiemi A e B, si dice che A è un **sottoinsieme** di B (e si scrive $A \subseteq B$) se ogni elemento appartenente all'insieme A appartiene anche all'insieme B.

ESEMPI

L'insieme dei numeri pari è un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali.

L'insieme dei multipli di 2 **non** è un sottoinsieme dell'insieme dei multipli di 6.

può essere

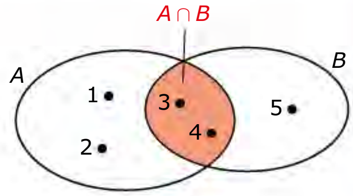
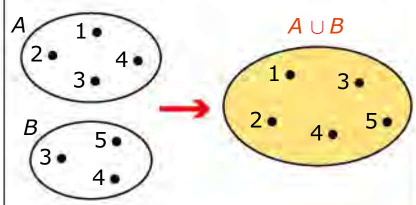
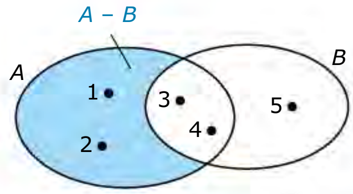
Improprio

Se coincide con l'insieme stesso o con l'insieme vuoto (che si indica con il simbolo $\varnothing$ o con $\{\}$).

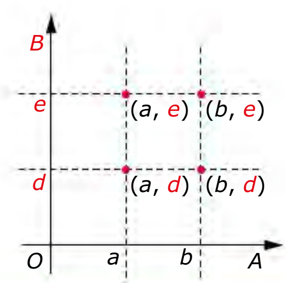
Proprio

Se è diverso dall'insieme stesso e dall'insieme vuoto. In particolare se A è un sottoinsieme di B e A è diverso da B, si scrive: $A \subset B$.

Operazioni tra insiemi

<table>
<tr><th>Operazione</th><th>Simbolo</th><th>ESEMPIO</th><th>Rappresentazione grafica</th></tr>
<tr>
<td>Dati due insiemi A e B, si chiama intersezione di A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A e a B.</td>
<td>Intersezione di A e B:
$A \cap B$</td>
<td>Se $A = \{1, 2, \underline{3}, \underline{4}\}$ e $B = \{\underline{3}, \underline{4}, 5\}$, gli elementi in comune sono quelli sottolineati, quindi:
$A \cap B = \{3, 4\}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dati due insiemi A e B, si chiama unione di A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B.</td>
<td>Unione di A e B:
$A \cup B$</td>
<td>Se $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$, l'insieme unione di A e B è:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
ATTENZIONE
Gli elementi 3 e 4, che appartengono sia ad A sia a B, vanno scritti una sola volta!</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Dati due insiemi A e B, si chiama differenza di A e B l'insieme degli elementi che appartengono ad A ma non a B.</td>
<td>Differenza di A e B:
$A - B$</td>
<td>Se $A = \{1, 2, \underline{3}, \underline{4}\}$ e $B = \{\underline{3}, \underline{4}, 5\}$, gli elementi di A che appartengono anche a B sono quelli sottolineati; eliminando da A questi elementi otteniamo che:
$A - B = \{1, 2\}$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>L'insieme dei due elementi a e b, presi in quest'ordine, si chiama coppia ordinata.

Dati due insiemi A e B, si chiama prodotto cartesiano di A e B l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$.</td>
<td>Coppia ordinata:
(a, b)

Prodotto cartesiano di A e B:
$A \times B$</td>
<td>Se $A = \{a, b\}$ e $B = \{d, e\}$, allora:
$A \times B =$
$= \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e)\}$</td>
<td>Tabella a doppia entrata
<table>
<tr><td>B / A</td><td>d</td><td>e</td></tr>
<tr><td>a</td><td>(a, d)</td><td>(a, e)</td></tr>
<tr><td>b</td><td>(b, d)</td><td>(b, e)</td></tr>
</table>
Diagramma cartesiano

</td>
</tr>
</table>

Sintesi visuale

Monomi

Monomio

Espressione algebrica che può scriversi come prodotto di numeri e di lettere, oppure di loro potenze in cui gli esponenti delle variabili sono numeri naturali.

ESEMPI

Sono monomi:

x^3y^2 $\quad \frac{1}{2}ab$ $\quad 2^{-1}xy$ $\quad 5$ $\quad 0$

In un monomio un numero può avere esponente negativo

I numeri sono particolari monomi 0 è il monomio nullo

Non sono monomi

x^3+y^2 $\quad \frac{1}{3a}b$ $\quad 2x^{-1}y$

In un monomio una variabile **non** può avere esponente negativo

Forma normale di un monomio

Monomio che si presenta come prodotto di un solo fattore numerico e di potenze letterali con basi diverse.

ESEMPI

È in forma normale

$3x^2y^3$

Non è in forma normale

$2a3ab$ La forma normale sarebbe $6a^2b$

Coefficiente e parte letterale

In un monomio in forma normale, il **coefficiente** è il fattore numerico mentre la **parte letterale** è il prodotto dei fattori che contengono le variabili.

ESEMPIO

$\frac{3}{2}a^2b$

coefficiente

parte letterale

Grado rispetto a una variabile

In un monomio (non nullo) in forma normale è l'esponente della variabile considerata.

ESEMPIO

$\frac{5}{2}a^2b^3$ è di grado 2 rispetto alla variabile *a*, e di grado 3 rispetto alla variabile *b*.

Monomi simili

Due monomi (non nulli) che, ridotti in forma normale, hanno la stessa parte letterale.

ESEMPI

Sono simili:

$3a^2b$ e $5a^2b$

stessa parte letterale

Non sono simili:

$3a^2b$ e $5ab^2$

parte letterale diversa

Grado (complessivo)

In un monomio (non nullo) in forma normale è la somma degli esponenti di tutte le variabili che compaiono nel monomio.

ESEMPIO

$\frac{5}{2}a^2b^3$ è di grado $2+3=5$.

Monomi uguali e opposti

Due monomi simili sono:

- **uguali** se hanno lo stesso coefficiente;
- **opposti** se hanno i coefficienti opposti.

ESEMPI

Sono uguali:

$0{,}5x^2$ e $\frac{1}{2}x^2$

Sono opposti:

$-\frac{3}{2}ab$ e $\frac{3}{2}ab$

Operazioni con i monomi

Operazione tra monomi	Procedimento per eseguirla	ESEMPI
Addizione e sottrazione	• Si possono semplificare solo somme algebriche in cui gli addendi sono monomi *simili*. • La somma (differenza) di due monomi *simili* è un monomio *simile*, avente come coefficiente la somma (differenza) dei coefficienti.	• $3a + 2b$ non si può ulteriormente semplificare perché $3a$ e $2b$ non sono simili. • $3x + 2x = (3 + 2)x = 5x$ $3a - 5a = (3 - 5)a = -2a$
Moltiplicazione	Si moltiplicano i coefficienti e si sommano gli esponenti delle lettere uguali.	$(-2a^2b^3)(-3a^2b^2) = (-2)\cdot(-3)a^{2+2}b^{3+2} =$ $= +6a^4b^5$
Divisione	Si dividono i coefficienti e si sottraggono gli esponenti delle lettere uguali. La divisione dà luogo a un monomio solo se tutte le lettere che compaiono nel divisore compaiono anche nel dividendo, con esponente maggiore o uguale.	$(-6a^2b^5) : (-3a^2b^2) = [(-6) : (-3)]a^{2-2}b^{5-2} =$ $= +2a^0b^3 = +2b^3$
Potenza	Per elevare un monomio a *n* si eleva il coefficiente a *n* e si moltiplicano gli esponenti delle lettere per *n*.	$(-3a^2bc^3)^3 = (-3)^3a^{2\cdot3}b^{1\cdot3}c^{3\cdot3} =$ $= -27a^6b^3c^9$

Massimo comune divisore e minimo comune multiplo tra monomi

Monomio che ha come:

- **coefficiente** →
  - nel caso del M.C.D.: il M.C.D. dei coefficienti, se essi sono numeri interi, 1 in caso contrario
  - nel caso del m.c.m.: il m.c.m. dei coefficienti, se essi sono numeri interi, 1 in caso contrario
- **parte letterale** →
  - nel caso del M.C.D.: il prodotto dei fattori **comuni** a tutti i monomi, ognuno preso con l'esponente **minimo** con cui comprare
  - nel caso del m.c.m.: il prodotto dei fattori **comuni e non comuni** a tutti i monomi, ognuno preso con l'esponente **massimo** con cui compare

ESEMPI

Calcoliamo il M.C.D. e il m.c.m. dei tre monomi $3a^2b$, $6a^3bc$, $15a^4b^4$.

il minimo è 1
il minimo è 2

$$\text{M.C.D.}(3a^2b,\ 6a^3bc,\ 15a^4b^4) = 3a^2b$$

M.C.D.(3, 6, 15) = 3

a e *b* sono le sole lettere in comune a tutti e tre i monomi

il massimo è 1
il massimo è 4
il massimo è 4

$$\text{m.c.m.}(3a^2b,\ 6a^3bc,\ 15a^4b^4) = 30a^4b^4c$$

m.c.m.(3, 6, 15) = 30

le lettere che compaiono nei tre monomi dati (comuni e non comuni)

Lezione

8 B Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze.

1 $\frac{7}{2}xy - 2xy = \left(\frac{7}{2} - 2\right)xy = \ldots$

Moltiplica i coefficienti — Somma gli esponenti delle lettere uguali

2 $\left(-\frac{5}{7}b^7c\right)\cdot\left(\frac{21}{10}a^2b^3c^4\right) = \left[\left(-\frac{5}{7}\right)\cdot\left(\frac{21}{10}\right)\right]a^2b^{7+\ldots}c^{1+\ldots} = \ldots$

3 $\left(-\frac{1}{5}x^6y^9\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 x^{6\cdot\ldots}y^{9\cdot\ldots} = \ldots$

Dividi i coefficienti — Sottrai gli esponenti delle lettere uguali

4 $\left(-\frac{2}{3}a^5b^7\right):\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right) = \left[\left(-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{4}\right)\right]a^{5-\ldots}b^{7-\ldots} = -\frac{8}{\ldots}\ldots$

5 Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$\left(\frac{1}{2}x^3y^6\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2y^5\right) = 2x^5y^{11}$	No	$\left(\frac{1}{2}x^3y^6\right)\cdot\left(\frac{1}{4}x^2y^5\right) = \frac{1}{8}x^5y^{11}$
$(4a^2b^3)^2 = 16a^4b^6$	....	....
$(35t^8r^7):(-7t^8r^6) = -5r$	....	....
$pq + 3pq = 4p^2q^2$	....	....
$\left(\frac{1}{20}x^4y^2\right):\left(\frac{1}{4}xy\right) = \frac{1}{5}x^3y$	....	....
$p^2q - 2p^2q = -p^2q$	....	....
$(-11u^6v^5)(-2u^2v^7) = 22u^{12}v^{35}$	....	....

Problemi e modelli **Completa la risoluzione dei seguenti problemi.**

6 Le misure dei lati di un rettangolo R_1 sono $2a$ e b. Esse vengono rispettivamente aumentate di a e $3b$, ottenendo il rettangolo R_2. Di quanto è aumentata l'area, passando dal rettangolo R_1 al rettangolo R_2?

Soluzione

Esprimi in funzione di a e b l'area del rettangolo R_1: ....

Esprimi in funzione di a e b le misure dei lati del rettangolo R_2: ....

Esprimi in funzione di a e b l'area del rettangolo R_2: ....

Calcola la differenza tra l'area del rettangolo R_2 e l'area del rettangolo R_1: ....

7 Quanti grammi pesano le otto sfere di un cuscinetto a sfere in acciaio (peso specifico = 7,86 g/cm^3), sapendo che il diametro dell'anello esterno misura x cm e il diametro dell'anello interno è i $\frac{7}{10}$ di quello esterno? Ricorda che il volume di una sfera di raggio r si calcola con la formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ e che il peso si trova moltiplicando il volume per il peso specifico.

Soluzione

Dai dati del problema puoi ricavare la misura del diametro di una singola sfera: $\frac{1}{2}\left(x - \frac{\ldots}{\ldots}x\right) = \frac{\ldots}{\ldots}x.$

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
calcolare in modo errato le somme algebriche di monomi	**1.** $2a^2b+3a^2b=(2+3)(a^2b+a^2b)=$ $=5\cdot(2a^2b)=10a^2b$ **2.** $2a^2b+3a^2b=$ $=(2+3)a^{2+2}b^{1+1}=5a^4b^2$ **3.** $3x^2y^2-5xy=$ $=(3-5)x^{2-1}b^{2-1}=-2xy$ **Errato!**	**1.** $2a^2b+3a^2b=(2+3)(a^2b)=5a^2b$ **2.** $2a^2b+3a^2b=(2+3)(a^2b)=5a^2b$ **3.** $3x^2y^2-5xy$ non si può semplificare perché i monomi non sono simili **Corretto**
applicare in modo errato le proprietà delle potenze	**1.** $\left(\frac{1}{2}x^3y^4\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}x^6y^3\right)=$ $=-\frac{3}{10}x^{3\cdot6}y^{4\cdot3}=-\frac{3}{10}x^{18}y^{12}$ **2.** $\left(\frac{1}{2}x^{12}y^9\right):(x^6y^3)=$ $=\frac{1}{2}x^{12:6}y^{9:3}=\frac{1}{2}x^2y^3$ **3.** $\left(\frac{2}{5}x^{10}y^4\right)^3=\frac{8}{125}x^{10^3}y^{4^3}=$ $=\frac{8}{125}x^{1000}y^{64}$ **Errato!**	**1.** $\left(\frac{1}{2}x^3y^4\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}x^6y^3\right)=$ $=-\frac{3}{10}x^{3+6}y^{4+3}=-\frac{3}{10}x^9y^7$ **2.** $\left(\frac{1}{2}x^{12}y^9\right):(x^6y^3)=$ $=\frac{1}{2}x^{12-6}y^{9-3}=\frac{1}{2}x^6y^6$ **3.** $\left(\frac{2}{5}x^{10}y^4\right)^3=\frac{8}{125}x^{10\cdot3}y^{4\cdot3}=$ $=\frac{8}{125}x^{30}y^{12}$ **Corretto**
moltiplicare anziché dividere i coefficienti quando si eseguono le divisioni di monomi	$\left(\frac{3}{10}x^3y^5\right):\left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)=\frac{3}{25}xy^3$ **Errato!**	$\left(\frac{3}{10}x^3y^5\right):\left(\frac{2}{5}x^2y^2\right)=\frac{3}{4}xy^3$ **Corretto**

1 **a.** Scrivi due monomi simili di grado 5 nelle lettere x, y, z e w;
b. scrivi un monomio di grado 10 nelle lettere x, y e z, avente coefficiente uguale al grado rispetto alla lettera x.

2 Completa la seguente tabella.

Monomio	Forma normale	Grado	Monomio opposto	Monomio simile con coefficiente reciproco del monomio dato
$-\frac{1}{2}a^2bab^3$	....	....	....	....
$(-3x^2y)\left(-\frac{1}{3}xyz^3\right)$	....	....	....	....
$\frac{3}{2}u^2vuv^4$	....	....	....	....

Semplifica, se possibile, le seguenti espressioni.

3 $3a-2a$ $\qquad$ $2x+3y$ $\qquad$ $8x-6x$

4 $\frac{3}{2}a-2a$ $\qquad$ $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}x$ $\qquad$ $-\frac{1}{5}xy+\frac{3}{10}xy$

5 $(+2xy)(-3xy^2)$ $\qquad$ $(-4ab)(+3a)$ $\qquad$ $(-3xyz^2)(-3x^2y^5z)$

6 $(+6x^4y^2):(-2xy)$ $\qquad$ $(-10xyz^3):(-2xz)$ $\qquad$ $\left(-\frac{3}{2}xy^8z^4\right):\left(-\frac{9}{4}xy^5z\right)$

7 $(-2a^2b)^2$ $\qquad$ $(-3ab^3c^4)^3$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}abc^2\right)^3$

8 Completa la seguente tabella.

Monomio	Opposto del monomio	Doppio del monomio	Quadrato del monomio	Triplo del monomio	Cubo del monomio
$4x^2y^3$	....	....	....	....	....
....	$-2ab$	....	....	....	....
....	....	$4x^4y^2$	....	....	....
....	....	....	....	r^4s^5	....
....	....	....	....	....	$-27u^6v^9$

Semplifica le seguenti espressioni.

9 $[(3y-5y)^2(2x^2y^3)]:\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^2-[20y-(-8y)]$ $[4y]$

10 $\left(0{,}4y+\frac{2}{5}y\right)^2+\left(-\frac{3}{5}y\right)^2+(-26y^7):(13y^5)$ $[-y^2]$

11 $\left[\left(\frac{3}{2}u^3v^4z^5\right):\left(\frac{9}{4}uv^2z^4\right)\right]:\left(\frac{1}{6}u^2v\right)-(-3v^2z^2)^2:(-vz)^3$ $[13vz]$

12 $[(-x^2)^3+2(-x^3)^2]^3-(-4x^{11})^2:(-4x^4)$ $[5x^{18}]$

13 $(3xy)\cdot\left(-\frac{1}{2}xy^3\right)+\left(-\frac{3}{2}x^5y^7\right):\left(+\frac{3}{4}x^3y^3\right)-(-2xy^2)^2$ $\left[-\frac{15}{2}x^2y^4\right]$

14 $\frac{1}{2}[2a-(-3a)]^2-[-2a+(-3a)]^3+(-2a^2):(-4)+(+6a^5):(-3a^3)$ $[125a^3+11a^2]$

15 $(-6a^3):(2a^2)+(-2a^4)^2:\left[\left(\frac{1}{2}a^3\right)(-4a^4)\right]+(2a)^3:(-a)^2$ $[3a]$

16 $\left[\left(-\frac{3}{2}abc^2\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}a^2bc^3\right)\right]:\left(+\frac{3}{2}abc^2\right)^2+\left(-\frac{1}{2}abc^2\right)\left(-\frac{1}{2}ac\right)$ $\left[-\frac{1}{4}a^2bc^3\right]$

---

17 È dato un numero a. Esprimi tramite un'espressione algebrica la frase «il quadrato della differenza tra il quadrato del cubo di a e il cubo dell'opposto del doppio del quadrato di a» e semplifica l'espressione algebrica ottenuta. $[81a^{12}]$

18 È dato un numero a. Esprimi tramite un'espressione algebrica la frase «il cubo della differenza tra il cubo del quadrato di a e il quadrato dell'opposto del doppio del cubo di a» e semplifica l'espressione algebrica ottenuta. $[-27a^{18}]$

Calcola il M.C.D. e il m.c.m. dei seguenti gruppi di monomi.

19 $12a^3b^2$ $\quad 24a^5bc^8$ $\quad 48b^9c^{15}$

20 $4a^2b^3$ $\quad 5b^4c^7$ $\quad 15a^6b^9c^{15}$

21 $\frac{1}{2}x^5yz^3$ $\quad -\frac{4}{5}yz^5$ $\quad xy^2z^3$

22 $6a^4b^3$ $\quad 2ab^4c^2$ $\quad 3a^2b^5c$ $\quad 12abc^4$

Problemi e modelli

23 In un trapezio, la base maggiore e la base minore misurano rispettivamente $5a$ e $4a$, mentre l'altezza misura $2b$. Aumentando di a la misura di ciascuna delle due basi e di b la misura dell'altezza, di quanto aumenta l'area del trapezio? $\left[\frac{15}{2}ab\right]$

24 Al 15 settembre i funghi porcini hanno un prezzo sul mercato di p euro al kilogrammo. Dopo due settimane questo prezzo subisce un aumento del 15%; a metà ottobre si registra un altro rincaro del 10%. Poi, grazie a un periodo particolarmente piovoso, a fine ottobre il prezzo cala del 20%. Scrivi l'espressione algebrica che esprime, in funzione di p, il prezzo a fine ottobre e semplificala. Qual è la variazione percentuale di prezzo nel periodo che va da metà settembre a fine ottobre? $\left[\frac{253}{250}p;\ +1{,}2\%\right]$

Polinomi

Sintesi visuale

Polinomio

Espressione algebrica che può essere scritta come somma algebrica di monomi (detti termini del polinomio).

ESEMPI

Sono polinomi:

$2a + 3b$ $\quad \frac{1}{2}x^2 + xy - y$ $\quad x^3y$ $\quad 3a^3$

I monomi sono particolari polinomi, somma di se stessi con il monomio nullo

Non sono polinomi:

$\frac{x^3 + y^3}{y}$ $\quad \frac{1}{x+y}$ $\quad \sqrt{x} + y$

Forma normale di un polinomio

Polinomio in cui tutti i termini sono in forma normale e che non presenta termini simili.

ESEMPI

È in forma normale:
$a^2 + 2ab + b^2$

Non è in forma normale:
$a^2 + b^2 + 2ab + b^2$ ← La forma normale sarebbe $a^2 + 2b^2 + 2ab$

Polinomio omogeneo

Polinomio che, una volta ridotto in forma normale, è costituito da termini che hanno tutti lo stesso grado.

ESEMPI

È omogeneo:
$x^4 + x^2y^2 + xy^3$
grado 4

Non è omogeneo:
$a^3 + a^2y + a^2b^2$
grado 3 grado 4

Grado rispetto a una variabile

In un polinomio (non nullo) in forma normale è il massimo esponente con cui compare la variabile considerata nel polinomio.

ESEMPIO

il massimo è 3

$\frac{5}{2}a^2b^4 + \frac{1}{2}a^3b^2$

il massimo è 4

è di grado 3 rispetto alla variabile a e di grado 4 rispetto alla variabile b.

Polinomio ordinato

Polinomio ridotto in forma normale tale che, letto da sinistra verso destra, gli esponenti di una data variabile crescono (o decrescono).

ESEMPI

È ordinato secondo le potenze decrescenti di x:
$2x^5 + x^3 + x + 1$

Non è ordinato rispetto a x:
$1 + 2x^5 + x^2 + x^3$

Grado (complessivo)

In un polinomio (non nullo) in forma normale è il massimo tra i gradi dei suoi termini.

ESEMPIO

$\underbrace{a^2b^3}_{\text{grado } 2+3=5} + \underbrace{5a^4b^2}_{\text{grado } 4+2=6} + \underbrace{4b^5}_{\text{grado } 5}$ è di grado 6.

il grado massimo è 6

Polinomio completo rispetto a una variabile

Polinomio ridotto in forma normale in cui compaiono tutte le potenze della variabile considerata, da quella di grado massimo a quella di grado 0.

ESEMPI

È completo rispetto a x:
$3x^2 + 2x + 1$

Ci sono tutte le potenze di x, da quella di grado 2 a quella di grado 0 (che è $1 = x^0$)

Non è completo rispetto a x:
$x^3 + 2x^2 + 1$

Manca la potenza di grado 1

Addizione, sottrazione e moltiplicazione di polinomi

Addizioni e sottrazioni

ESEMPIO

$(-2x+5y-1)-(x+y-2)+(x-2y)=$

$=\underline{-2x}+\underline{5y}-1-\underline{x}-\underline{y}+2+\underline{x}-\underline{2y}=$

$=-2x+2y+1$

METODO

1. Si tolgono le parentesi, applicando le ordinarie regole sui segni.
2. Si riducono gli eventuali termini simili.

Moltiplicazione

ESEMPIO

$(2x+3)(x-3)=$

$=2x\cdot x+2x\cdot(-3)+3\cdot x+3\cdot(-3)=$

$=2x^2-\underline{6x}+\underline{3x}-9=$

$=2x^2-3x-9$

METODO

1. Si moltiplica ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo (proprietà distributiva) e si sommano i prodotti parziali.
2. Si riducono gli eventuali termini simili.

Prodotti notevoli

Prodotto notevole	ESEMPI
Somma di due monomi per la loro differenza $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$	$(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$ $(x+2y)(x-2y)=(x)^2-(2y)^2=x^2-4y^2$
Quadrato di un binomio $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$	$(A+B)^2=A^2+2\cdot A\cdot B+B^2$ $(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot 3+3^2=4x^2+12x+9$ $(x-3y)^2=[x+(-3y)]^2=$ $=x^2+2\cdot x\cdot(-3y)+(-3y)^2=x^2-6xy+9y^2$
Quadrato di un trinomio $(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+$ $+2AB+2AC+2BC$	$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+\underline{2\cdot A\cdot B}+\underline{2\cdot A\cdot C}+\underline{2\cdot B\cdot C}$ $(x+2y+z)^2=(x)^2+(2y)^2+(z)^2+2\cdot(x)\cdot(2y)+2\cdot(x)\cdot(z)+2\cdot(2y)\cdot(z)=$ $=x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz$
Cubo di un binomio $(A+B)^3=$ $=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$	$(A+B)^3=A^3+3\cdot A^2\cdot B+3\cdot A\cdot B^2+B^3$ $(x-3)^3=[x+(-3)]^3=(x)^3+3\cdot x^2\cdot(-3)+3\cdot(x)\cdot(-3)^2+(-3)^3=$ $=x^3-9x^2+27x-27$

Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze in cui ti guidiamo a svolgere operazioni con polinomi.

1 $(-2x+y)-(x-y)+(-x+y-1)=-2x+y-x \ldots y-x \ldots y-1=-4x+\ldots-\ldots$

cambia il segno
a **tutti** i termini
dentro le parentesi

2 $3a^2(a^3-a-1)=3a^2\cdot a^3+3a^2(-a)+3a^2(-1)=\ldots$

3 $(x-2y)(x+3y)=x\cdot x+x\cdot(3y)+(-2y)\cdot\ldots+(-2y)\cdot\ldots=\ldots$

4 $(x+1)(x-2)(x+3)=(x\cdot x-2x+\ldots-2)(x+3)=(x^2-\ldots-\ldots)(x+3)=$
$=x^2\cdot x+x^2\cdot 3-x\cdot x-x\cdot 3-\ldots\cdot x-\ldots\cdot 3=\ldots$

Completa gli sviluppi dei seguenti prodotti notevoli.

5 $\underbrace{(u^2-v^3)}_{A-B}\underbrace{(u^2+v^3)}_{A+B}=\underbrace{(u^2)^2}_{A^2}-\underbrace{(\ldots)^2}_{B^2}=u^{\ldots}-v^{\ldots}$

6 $\left(\frac{1}{5}z^2-w^5\right)\left(\frac{1}{5}z^2+w^5\right)=\left(\frac{1}{5}z^2\right)^{\ldots}-(w^5)^2=\ldots-\ldots$

7 $\left(\frac{1}{2}a-3b\right)^2=\Big[\underbrace{\left(\frac{1}{2}a\right)+(-3b)}_{A+B}\Big]^2=\underbrace{(\ldots)^2}_{A^2}+\underbrace{2\cdot\frac{1}{2}a\cdot(\ldots)}_{2AB}+\underbrace{(\ldots)^2}_{B^2}=\ldots-\ldots+\ldots$

8 $(x^3+10y^4)^2=(x^3)^{\ldots}+2(x^3)(10y^4)+(10y^4)^{\ldots}=x^6+\ldots+\ldots$

9 $(3-2x)^3=[\underbrace{3+(-2x)}_{A+B}]^3=\underbrace{3^3}_{A^3}+\underbrace{3\cdot 3^2\cdot(-2x)}_{3A^2B}+\underbrace{3\cdot 3\cdot(-2x)^2}_{3AB^2}+\underbrace{(-2x)^3}_{B^3}=\ldots-\ldots+\ldots-\ldots$

10 $\left(p+\frac{1}{3}q\right)^3=p^3+3\cdot\ldots^2\cdot\left(\frac{1}{3}q\right)+3\cdot p\cdot(\ldots)^2+\left(\frac{1}{3}q\right)^3=\ldots+\ldots+\ldots+\ldots$

11 $\underbrace{(10a-3b+2c)^2}_{A+B+C}=\underbrace{(10a)^2}_{A^2}+\underbrace{(-3b)^2}_{B^2}+\underbrace{(2c)^2}_{C^2}+\underbrace{2(10a)(-3b)}_{2AB}+\underbrace{2(10a)(2c)}_{2AC}+\underbrace{2(-3b)(2c)}_{2BC}=\ldots$

12 $(3x-4y+5z)^2=(3x)^2+(-4y)^2+(\ldots)^2+2(3x)(-4y)+2(3x)(\ldots)+2(-4y)(\ldots)=\ldots$

13 Completa la seguente tabella, inserendo Sì/No nella seconda colonna e inserendo l'eventuale risultato corretto nella terza colonna.

Uguaglianza	È corretta?	Eventuale correzione
$(3x-y)\left(\frac{1}{3}x+y\right)=(x-y)(x+y)$	No	$(3x-y)\cdot\left(\frac{1}{3}x+y\right)=x^2+3xy-\frac{1}{3}xy-y^2$
$x-[y-(z-w)]=x-y-(w-z)$	....	....
$\frac{3}{4}x(4x-y-z)=3x(x-y-z)$	....	....
$(-3x+6y)(6y-3x)=9x^2-36y^2$	....	....
$(a^3-5)^2=a^9-10a^3+25$	....	....
$(t-2)^3=t^3+6t^2-12t-8$	....	....
$\left(2t-\frac{1}{2}\right)^3=8t^3-6t^2+\frac{3}{2}t-\frac{1}{8}$	....	....

14 Completa la seconda colonna della seguente tabella.

Grandezza descritta a parole	Polinomio che la esprime, in forma normale
La spesa complessiva di Laura, che ha comprato 10 matite, ciascuna al costo di x centesimi, e 15 biro, ciascuna al costo di $2y$ centesimi.	$\underbrace{10 \cdot \frac{x}{100}}_{\text{costo delle 10 matite}} + \underbrace{15 \cdot \frac{2y}{100}}_{\text{costo delle 15 biro}} = \ldots\ldots x + \ldots\ldots y$
La somma complessiva che possiede Barbara, se ha x monete da 2 euro, y monete da 50 centesimi e z monete dal 20 centesimi.	....
La somma che possedeva Mario prima di acquistare 5 libri, ciascuno al prezzo di x euro, e 4 quaderni, ciascuno al prezzo di y euro, sapendo che dopo gli acquisti gli sono rimasti $3x + 5y$ euro.	$\underbrace{(5x + 4y)}_{\text{somma spesa}} + \underbrace{(3x + 5y)}_{\text{somma rimasta}} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{somma iniziale}}$
La somma che rimane a Paolo dopo avere acquistato 6 libri, ciascuno al prezzo di x euro, e 5 quaderni, ciascuno al prezzo di y euro, sapendo che prima degli acquisti Paolo possedeva $10x + 9y$ euro.	$\underbrace{(\ldots\ldots)}_{\text{somma iniziale}} - \underbrace{(\ldots\ldots)}_{\text{somma spesa}} = \underbrace{\ldots\ldots\ldots}_{\text{somma rimasta}}$
Il profitto di Alessandro, se ha acquistato $(x + 3)$ pere, ciascuna al prezzo di $(y + 1)$ euro, e le ha rivendute tutte al prezzo di $(2y + 1)$ euro.	$\underbrace{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}_{\text{ricavo ottenuto dalla vendita}} - \underbrace{(\ldots\ldots)(\ldots\ldots)}_{\text{spesa iniziale per l'acquisto}} =$ $= \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{profitto}} =$ $= \ldots\ldots\ldots\ldots$

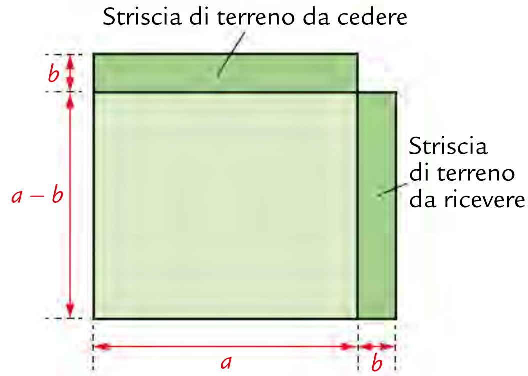
Problemi e modelli

15 Completa la risoluzione del seguente problema.

Il signor Rossi possiede un appezzamento di terreno di forma quadrata. Il suo vicino, che confina con lui lungo due lati consecutivi, chiede che gli ceda una piccola striscia nella parte alta in cambio di una della stessa altezza nell'altro lato, in modo che il terreno diventi un rettangolo, come evidenziato in figura.

Ma il signor Rossi non accetta perché lo scambio risulterebbe svantaggioso per lui. Per questo propone di ricevere in aggiunta un piccolo appezzamento quadrato.

Poni la misura in metri del lato del quadrato uguale ad a, quella dell'altezza della striscia uguale a b e giustifica la risposta del signor Rossi. Quale deve essere la misura del lato del quadrato chiesto a compensazione?



Soluzione

Calcola l'area del terreno quadrato originario: ....

Calcola l'area del terreno rettangolare che risulterebbe al signor Rossi dopo lo scambio fatto con il vicino:

....

Calcola la differenza tra le due aree ottenute: ....

Quanto vale il lato dell'appezzamento quadrato che il signor Rossi chiede come compensazione?

....

Lezione **9** **C**

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
non cambiare i segni di tutti i termini all'interno di una parentesi se davanti alla parentesi c'è un segno «–»	$(-2x+y)-(-x+2y)=$ $=-2x+y+x+2y$ **Errato!**	$(-2x+y)-(-x+2y)=$ $=-2x+y+x-2y$ **Corretto**
semplificare in modo scorretto i coefficienti nei prodotti tra un monomio e un polinomio o tra due polinomi	**1.** $\left(\frac{1}{\cancel{2}}x^3y^4\right)\cdot(\cancel{2}x-5y)=$ $=x^3y^4\cdot(x-5y)=x^4y^4-5x^3y^5$ **2.** $(\cancel{2}a-\cancel{3}b)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{4}}ab-\frac{1}{\cancel{6}}\right)=$ $=(a-b)\cdot\left(\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\right)$ **Errato!**	**1.** $\left(\frac{1}{2}x^3y^4\right)\cdot(4x-5y)=$ $=2x^4y^4-\frac{5}{2}x^3y^5$ **2.** $(2a-3b)\cdot\left(\frac{1}{4}ab-\frac{1}{6}\right)=$ $=\frac{1}{2}a^2b-\frac{1}{3}a-\frac{3}{4}ab^2+\frac{1}{2}b$ **Corretto**
sbagliare i segni in prodotti notevoli del tipo: $(A+B)\cdot(A-B)$	$(2x-5y)\cdot(-5y-2x)=$ $=(2x)^2-(-5y)^2$ **Errato!**	$(2x-5y)\cdot(-5y-2x)=$ $=(-5y)^2-(2x)^2$ **Corretto**
dimenticare i doppi prodotti nello sviluppo del quadrato di un binomio o di un trinomio	$(6a^2b-1)^2=$ $=36a^4b^2+1$ **Errato!**	$(6a^2b-1)^2=$ $=36a^4b^2-12a^2b+1$ **Corretto**
sbagliare i segni nello sviluppo del quadrato di un binomio o di un trinomio	$(6a^2b-1)^2=$ $=36a^4b^2-12a^2b-1$ **Errato!**	$(6a^2b-1)^2=$ $=36a^4b^2-12a^2b+1$ **Corretto**
dimenticare i tripli prodotti nello sviluppo del cubo di un binomio	$(2x-4a)^3=$ $=8x^3-64a^3$ **Errato!**	$(2x-4a)^3=$ $=8x^3-48x^2a+96xa^2-64a^3$ **Corretto**
sbagliare i segni nello sviluppo del cubo di un binomio	$(-x-2y)^3=$ $=-x^3+6x^2y+12xy^2-8y^3$ **Errato!**	$(-x-2y)^3=$ $=-x^3-6x^2y-12xy^2-8y^3$ **Corretto**

Esegui le seguenti addizioni e sottrazioni.

1 $(-2x+y)-(x-y)+(-x+y-1)$ $[-4x+3y-1]$

2 $\left(-\frac{1}{2}x+2y-\frac{3}{2}z\right)-\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y+z\right)$ $\left[-x+\frac{7}{2}y-\frac{5}{2}z\right]$

3 $x-y-[2x+y-z-(x+w)-(y-2w)]$ $[-y+z-w]$

Esegui le seguenti moltiplicazioni.

4 $2x^2y(2xy-x^2y^2-3xy)$ $(x-2)(2x+3)$ $(x^2-1)(2x^2+3)$

5 $-\frac{1}{2}a^2b(6a-8ab^2-1)$ $(a^2-1)(a^3+2)$ $(a-1)(a^2-3a+2)$

6 $(x^2-1)(2x^2+3)$ $(b^2-7)(5-b^2)$ $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

Esegui le seguenti operazioni utilizzando i prodotti notevoli.

7 $(x+3)(x-3)$ $(x^2-2)(x^2+2)$ $(2a-3b^2)(2a+3b^2)$

8 $(x^3y-4z^2)(x^3y+4z^2)$ $(2x-1)^2$ $(a+2b)^2$

9 $(2x+1)^3$ $(x-y-2)^2$ $(2-x^2)(2+x^2)$

10 $\left(\frac{1}{3}n-m\right)^3$ $(a+2b-1)^2$ $(x^6y^2+4z^4)(x^3y-2z^2)(x^3y+2z^2)$

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando, ovunque possibile, i prodotti notevoli.

11 $(a-2b)^2-(2a-3b)(2a+3b)+(a+b)^2+2b(a-7b)$ $[-2a^2]$

12 $(x^2-2)^2-2(x^2-2)(x^2+2)+(x-1)(x+1)(x^2+1)$ $[11-4x^2]$

13 $(1-a)^2(1+a)^2(1+a^2)^2-(1+a^4)^2$ $[-4a^4]$

14 $\left(\frac{3}{4}n^2-\frac{1}{6}n\right)^2-\frac{7}{4}\left(\frac{1}{2}n^2-n\right)\left(\frac{1}{2}n^2+n\right)-\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{3}n\right)\left(\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{3}n\right)$ $\left[\frac{5}{3}n^2\right]$

15 $\left\{\left(\frac{3}{2}t-3\right)^2\left[\left(\frac{1}{3}-2t\right)^2\left(\frac{1}{3}+2t\right)^2-\left(4t^2-\frac{4}{9}\right)\left(4t^2+\frac{2}{9}\right)\right]-\frac{1}{4}t^2\right\}^2-t(t-2)$ $[1]$

16 $\left(\frac{1}{3}a-\frac{3}{2}b\right)^3-\left(\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b\right)^2\left(\frac{1}{3}a-b\right)+\frac{1}{2}b\left(a-\frac{5}{2}b\right)^2$ $[0]$

17 Senza svolgere le potenze, calcola il risultato delle espressioni seguenti:

a. $100^2-99^2+57^2-56^2$ **b.** $101^2+99^2-100^2$

(*Suggerimento*: nell'esercizio **a** devi evidenziare prodotti notevoli; nell'esercizio **b** osserva che $100=99+1$ e applica opportuni prodotti notevoli.) [**a.** 312; **b.** 1002]

Problemi e modelli

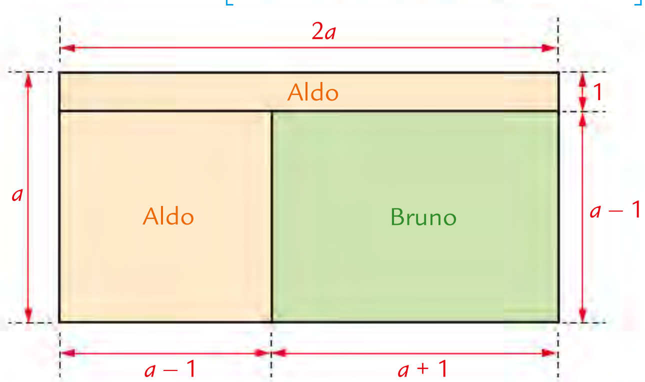
18 Paolo, Marco e Luca calcolano i costi della casa in affitto per le vacanze. Paolo ha usato la casa 6 giorni in più di Marco, Luca ha soggiornato una volta e mezzo rispetto ai giorni di Paolo. Sapendo che non si sono mai trovati contemporaneamente in casa e che questa non è mai rimasta disabitata, determina la somma dei giorni in cui la casa è stata affittata (indica con x il numero dei giorni in cui ha soggiornato Marco). Calcola la spesa complessiva e quella di ciascun amico sapendo che $x=8$ e che l'affitto giornaliero della casa è 55 euro.

$\left[\frac{7}{2}x+15\right.$; spesa complessiva: € 2365; spesa di Marco: € 440; spesa di Paolo: € 770; spesa di Luca: € 1155$\left.\right]$

19 In un trapezio la lunghezza della base maggiore B supera di 2 cm i $\frac{3}{2}$ di quella della base minore b. L'altezza h è $\frac{1}{3}$ della base maggiore. Determina la misura, in cm^2, dell'area del trapezio e la differenza delle misure delle aree dei quadrati costruiti sulle due basi in funzione di b.

$\left[\frac{5}{8}b^2+\frac{4}{3}b+\frac{2}{3};\ \frac{5}{4}b^2+6b+4\right]$

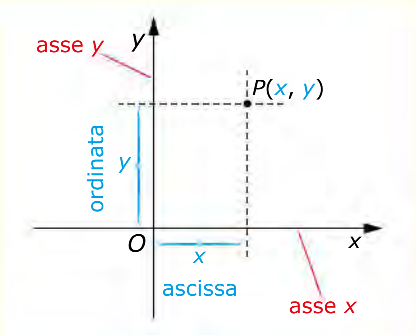
20 Due fratelli, Aldo e Bruno, devono dividersi un terreno rettangolare con un lato doppio dell'altro. Poiché Aldo vuole realizzarvi un orto formato da un quadrato e una striscia larga un metro e lunga quanto il lato maggiore del terreno, la divisione deve essere fatta come in figura e quindi le due parti non hanno la stessa area. Posta uguale ad a la misura in metri del lato minore (con $a>1$), determina l'area delle due parti e la loro differenza, in modo che il fratello che ha la parte maggiore possa risarcire l'altro.

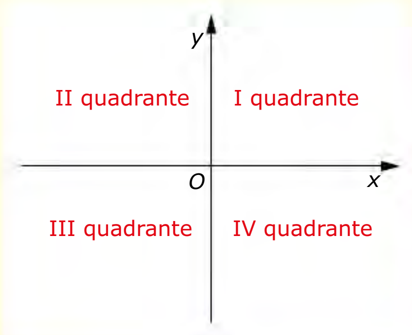


$[A_{\text{Aldo}}=a^2+1,\ A_{\text{Bruno}}=a^2-1;\ \text{differenza}=2]$

Sintesi visuale

Piano cartesiano





Funzioni reali di variabile reale

Funzione

Dati due insiemi X e Y, una **funzione** f da X a Y è un procedimento che consente di associare a *ogni* elemento x di X un *solo* elemento di Y, indicato con $f(x)$.

ESEMPI

Sia X l'insieme dei cittadini italiani e Y l'insieme dei rispettivi codici fiscali.
Il procedimento che associa a ogni cittadino italiano il suo codice fiscale è una funzione da X a Y perché a *ogni* cittadino resta associato *un solo* codice fiscale.

Sia $X = Y = \mathbf{N} - \{0\}$. Il procedimento che associa a ogni elemento di X i suoi divisori **non** è una funzione da X a Y, perché a ogni elemento di X restano associati *almeno due* elementi di Y (infatti ogni numero naturale diverso da zero è divisibile almeno per se stesso e per 1).

Dominio e codominio

L'insieme X è detto **dominio** della funzione, mentre l'insieme Y è il **codominio**. Per indicare una funzione f di dominio X e codominio Y si scrive

$$f : X \to Y$$

Immagine

Data una funzione $f : X \to Y$ l'insieme I costituito da tutti i valori $f(x)$, al variare di x nel dominio X, costituisce l'insieme immagine, o semplicemente **immagine**, della funzione f.

Funzione reale di variabile reale

Una funzione in cui il dominio e il codominio sono sottoinsiemi dell'insieme **R** dei numeri reali. Se il dominio di una funzione $y = f(x)$ non è specificato si assume che sia l'insieme di tutti i valori di x per cui l'espressione $f(x)$ è definita.

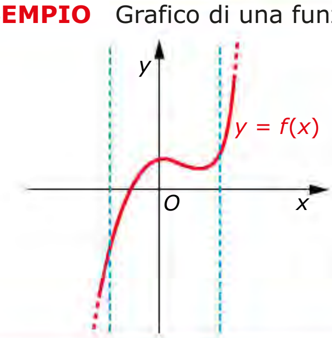
Grafico di una funzione *f* reale di variabile reale

La rappresentazione nel piano cartesiano dell'insieme

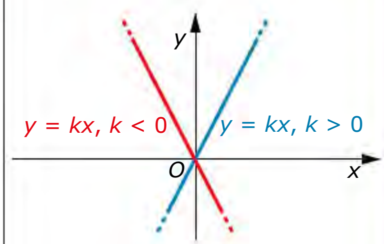
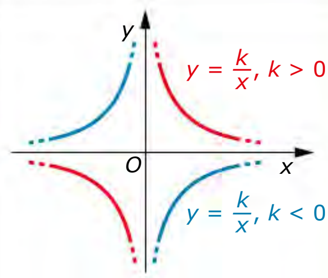
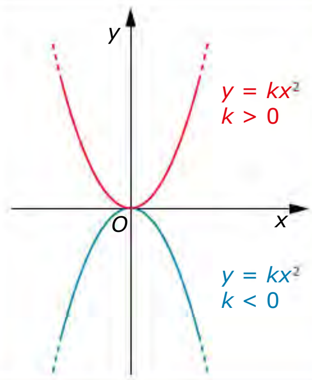
$$\{(x, f(x)) | x \in D\}$$

essendo D il dominio della funzione.
Il grafico di una funzione reale di variabile reale è caratterizzato dal fatto che ogni retta verticale lo interseca al massimo in un punto.

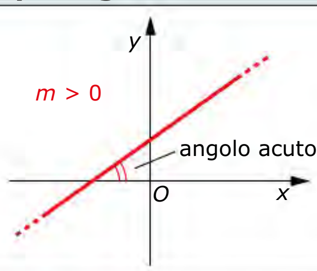
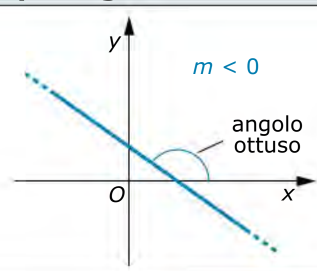
ESEMPIO Grafico di una funzione



Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e quadratica

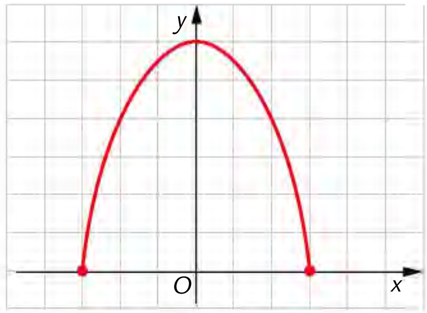
Tipo di proporzionalità	Caratterizzazione a parole	Funzione che esprime il legame fra le due variabili	Grafico
Diretta	Una variabile y si dice **direttamente proporzionale** alla variabile x quando, per ogni $x \neq 0$, si mantiene costante (diverso da zero) il rapporto: $\frac{y}{x}$ Il valore costante di questo rapporto è la **costante di proporzionalità**.	$y = kx$ dove k è una costante, con $k \neq 0$	
Inversa	Una variabile y si dice **inversamente proporzionale** alla variabile x quando si mantiene costante (diverso da zero) il prodotto: xy Il valore costante di questo prodotto è la **costante di proporzionalità**.	$y = \frac{k}{x}$ dove k è una costante, con $k \neq 0$	
Quadratica	Una variabile y si dice **proporzionale al quadrato** della variabile x quando, per ogni $x \neq 0$, si mantiene costante (diverso da zero) il rapporto: $\frac{y}{x^2}$ Il valore costante di questo rapporto è la **costante di proporzionalità**.	$y = kx^2$ dove k è una costante, con $k \neq 0$	

Funzioni lineari

Funzione lineare di equazione $y = mx + q$	
Tipo di grafico se $m > 0$	**Tipo di grafico se $m < 0$**
	
Le due rette, che costituiscono il grafico delle funzioni lineari $y = mx + q$ e $y = m'x + q'$, sono parallele se e solo se: $m = m'$	

Esercizi guidati

1 Completa il seguente esercizio, in cui ti guidiamo a determinare il dominio e l'insieme immagine della funzione il cui grafico è mostrato di seguito.



- Il *dominio* è l'insieme dei valori assunti dalle *ascisse* dei punti appartenenti al grafico della funzione. Osservando la figura, puoi notare che le ascisse dei punti del grafico sono comprese tra -3 e ....., quindi il dominio è l'insieme:

  $D = \{x \in \mathbf{R} \mid ..... \leq x \leq .....\}$

- L'insieme *immagine* è l'insieme dei valori assunti dalle *ordinate* dei punti appartenenti al grafico della funzione. Osservando la figura, puoi notare che le ordinate dei punti del grafico sono comprese tra 0 e ....., quindi l'immagine è l'insieme:

  $I = \{y \in \mathbf{R} \mid ..... \leq y \leq .....\}$

2 Completa la seguente tabella, in cui ti guidiamo a tracciare il grafico di una funzione.

Traccia approssimativamente il grafico della funzione $y = \frac{1}{2}x + 1$.

1° passo: completa la tabella di valori per x e y predisposta qui a fianco. Osserva che abbiamo scelto di attribuire a x valori *pari* perché, in questo modo, evitiamo di ottenere per y valori frazionari.
Per esempio, sostituendo -4 al posto di x nell'equazione della funzione $y = \frac{1}{2}x + 1$, otteniamo:

$y = \frac{1}{2}(-4) + 1 = -2 + 1 = -1$

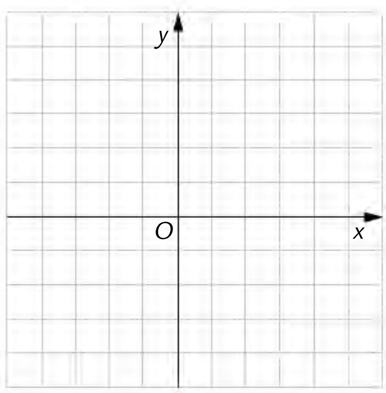
Perciò, nella colonna delle y, in corrispondenza del valore -4 abbiamo posto il valore -1.

x	y
-4	-1
-2	.....
0	.....
2	.....
4	.....

2° passo: deduci dalla tabella le coordinate di alcuni punti appartenenti al grafico della funzione:

$(-4, -1)$, $(-2, ...)$, $(0, ...)$, $(2, ...)$, $(4, ...)$

e rappresentali nel piano cartesiano.
Congiungendo con una linea continua i punti rappresentati, otterrai il grafico della funzione data, che è una retta.



3 Completa il seguente esercizio, in cui ti guidiamo a stabilire se le seguenti tabelle sono relative a funzioni di proporzionalità diretta o inversa.

Considera la prima tabella e calcola i rapporti tra y e x:

$$\frac{-4}{-2} = \dots \qquad \frac{-2}{-1} = \dots \qquad \frac{4}{2} = \dots \qquad \frac{6}{3} = \dots$$

x	y
−2	−4
−1	−2
2	4
3	6

x	y
−3	−4
−2	−6
1	12
2	6

Dal momento che i rapporti sono tutti uguali, si tratta di una funzione di proporzionalità *diretta* con costante di proporzionalità $k = \dots$
Pertanto la funzione ha equazione $y = \dots\, x$.

Ragionando analogamente sulla seconda tabella, puoi notare che i rapporti tra y e x **non** sono costanti, quindi **non** si tratta di una proporzionalità .... Controlla allora se le variabili y e x sono legate da una legge di proporzionalità *inversa*, calcolando i prodotti tra x e y:

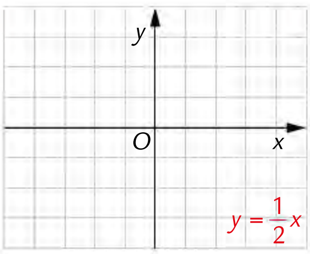
$(-3)(-4) = \dots\dots$ $\qquad (-2)(-6) = \dots\dots$
$(+1)(+12) = \dots\dots$ $\qquad (+2)(+6) = \dots\dots$

Quindi si tratta di una legge di proporzionalità inversa, con costante di proporzionalità $k = \dots\dots$
L'equazione della funzione è dunque:

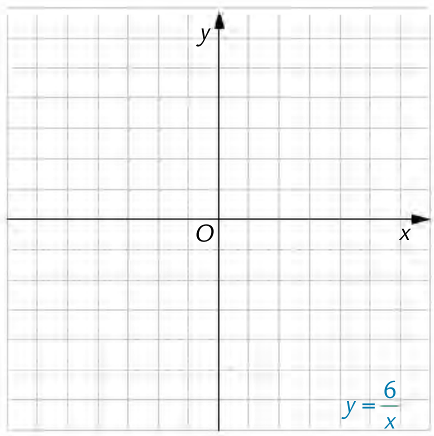
$$y = \frac{\dots}{x}$$

4 Completa i grafici delle funzioni $y = \frac{1}{2}x$ e $y = \frac{6}{x}$, dopo avere completato la tabella di valori proposta. Che tipo di proporzionalità esprimono tali funzioni?

x	y
−4	−2
−2	.....
0	.....
2	1
4	.....



x	y
−6	.....
−3	.....
−2	−3
2	.....
3	.....
6	1



Problemi e modelli

5 Completa la risoluzione del seguente problema.
Il signor Filarmonici ha la possibilità di abbonarsi a una serie di 14 concerti al prezzo complessivo di 180 euro, mentre il prezzo di un singolo concerto è di 20 euro.
Esprimi in funzione del numero x di concerti la spesa y in euro, senza abbonamento.
Dopo aver completato la seguente tabella:

Numero di concerti	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Spesa (€)	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

stabilisci a quanti concerti deve andare il signor Filarmonici perché gli convenga l'abbonamento.

Soluzione
La funzione che esprime la spesa (in euro) y al variare del numero x di concerti è una proporzionalità ...., che ha espressione: $y = \dots\dots\, x$.
Completa la tabella tenendo conto della relazione che hai appena scritto.
Dai valori che hai inserito puoi ora dedurre che al signor Filarmonici conviene l'abbonamento se partecipa almeno a .... concerti.

Equazioni di primo grado

Sintesi visuale

Equazione

Uguaglianza contenente almeno una lettera, detta *incognita*, di cui si cercano i valori che rendono l'uguaglianza vera.

ESEMPIO

$\underbrace{2x-1}_{\text{1° membro}} = \underbrace{x+2}_{\text{2° membro}}$ è un'equazione nell'incognita x.

Classificazione rispetto alle espressioni algebriche nei due membri

Un'equazione si dice **intera** se l'incognita non compare in alcun denominatore; altrimenti si dice **fratta** (**o frazionaria**).

ESEMPI

Sono equazioni intere:

$x^2-3x=1 \quad x-\frac{3}{2}x=\frac{1}{3}$ Ai denominatori ci sono numeri, mai l'incognita

Sono equazioni fratte:

$x-\frac{3}{2x}=1 \quad x^{-1}-3x=5$ equivale a $\frac{1}{x}$

Equazione in forma normale

Equazione della forma $A(x)=0$ dove il polinomio $A(x)$ è in forma normale.

ESEMPI

È in forma normale

$x^2-3x+5=0$

Non è in forma normale

$x^2-3x=5$

Grado di un'equazione

Il grado del polinomio $A(x)$, una volta che l'equazione è nella forma normale $A(x)=0$.

ESEMPIO

$x^2+2x+1=x^2$

forma normale

$2x+1=0$ equazione di 1° grado

Soluzione di un'equazione in una incognita

Numero che, sostituito nell'equazione al posto dell'incognita, la trasforma in una uguaglianza vera.

ESEMPI

-1 è una soluzione dell'equazione $x^2-1=0$ perché, sostituendo -1 al posto di x, si ottiene l'uguaglianza: $(-1)^2-1=0$ che è vera $(0=0)$.

$+2$ **non** è una soluzione dell'equazione $x^2-1=0$ perché, sostituendo $+2$ al posto di x, si ottiene l'uguaglianza: $(+2)^2-1=0$ ossia $3=0$ che è falsa.

Equazioni equivalenti

Equazioni che hanno le stesse soluzioni.

ESEMPIO

$2x=2$ e $3x=3$ sono equivalenti perché hanno entrambe come unica soluzione $x=1$.

Classificazione in base alle soluzioni

Un'equazione di primo grado si dice:
- **determinata** se ammette una sola soluzione;
- **impossibile** se non ammette alcuna soluzione;
- **indeterminata** se ammette infinite soluzioni.

ESEMPI

- $2x=2$ è determinata perché ha l'unica soluzione $x=1$.
- $0x=2$ è impossibile perché qualsiasi numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 0.
- $2x=2x$ è indeterminata perché è verificata per ogni valore reale di x.

Principi di equivalenza

Regole	ESEMPI: Equazione originaria		Equazione equivalente
Si può aggiungere o sottrarre a entrambi i membri di un'equazione uno stesso termine (primo principio di equivalenza).	$3x + 4 = 5$	→ Sottraiamo a entrambi i membri il numero 4.	→ $3x+4-4=5-4$
Si può trasportare un termine che compare come **addendo** da un membro all'altro di un'equazione cambiandogli il segno.	$2x + 3 = 5 - 4x$	→ Trasportiamo $-4x$ al primo membro e $+3$ al secondo.	→ $2x + 4x = 5 - 3$
Se in un'equazione compaiono due termini **uguali**, uno al primo membro e uno al secondo, questi si possono «sopprimere».	$x^2+x=x^2+2x+1$	→ Possiamo sopprimere i due termini di secondo grado.	→ $x = 2x + 1$
Si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero, purché questo sia **diverso da zero** (secondo principio di equivalenza).	$6x - 3 = 9$ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = 1$	→ Possiamo *dividere* tutti i termini per 3. → Possiamo *moltiplicare* tutti i termini per 6.	→ $2x - 1 = 3$ → $3x - 2x = 6$

Equazione di primo grado in forma normale

Equazione in forma normale
$\boldsymbol{ax = b}$

$a = 0$

$b = 0$: equazione indeterminata (identità) $S = \mathbf{R}$

ESEMPIO
$0x = 0$
è indeterminata

$b \neq 0$: equazione impossibile $S = \varnothing$

ESEMPIO
$0x = 4$
è impossibile

$a \neq 0$: equazione determinata $S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$

ESEMPIO
$2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$
è determinata

Metodo risolutivo di una generica equazione di primo grado numerica intera

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3}x = 1 + x$.

$6\left(\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{3}x\right) = 6 \cdot (1 + x)$

$3(2x - 1) - 2x = 6(1 + x)$

$6x - 3 - 2x = 6 + 6x$

$6x - 2x - 6x = 6 + 3$

$-2x = 9$

$x = -\frac{9}{2}$

METODO

1. Se l'equazione è a coefficienti frazionari, si moltiplicano i due membri per il m.c.m. dei denominatori per ricondursi a una equazione a coefficienti interi.
2. Si svolgono eventuali calcoli.
3. Si portano tutti i termini con la x al primo membro e quelli numerici al secondo.
4. Si risolve l'equazione del tipo $ax = b$ a cui si giunge.

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella, seguendo l'esempio.

Equazione	Sostituisci al posto di x il numero...	Ottieni l'uguaglianza...	L'uguaglianza ottenuta è vera o falsa?	Il numero sostituito al posto di x è una soluzione dell'equazione?
$x^2+2x+3=0$	-1	$1-2+3=0$	V $\boxed{F}$	SÌ $\boxed{NO}$
$3x+x=4$	2	....	V F	SÌ NO
$x^3+8=0$	-2	....	V F	SÌ NO
$2x-8=x+4$	12	....	V F	SÌ NO

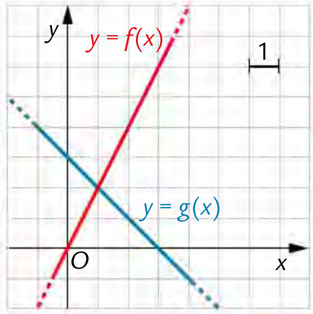
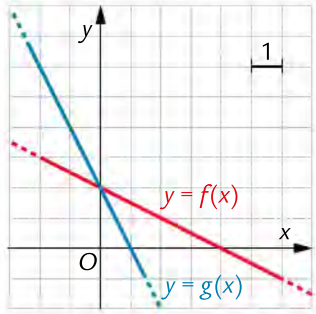
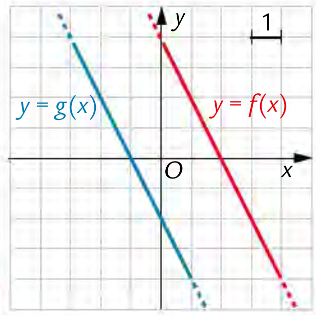
2 Completa la tabella, seguendo i passi indicati nella prima colonna e l'esempio svolto nella seconda.

Passi del procedimento	Equazione da risolvere: $\frac{(x-1)^2-x^2}{2}=\frac{x+1}{3}$	Equazione da risolvere: $\frac{x-4}{2}=\frac{(x+2)^2-x^2}{3}$
Liberiamo l'equazione dai denominatori moltiplicando i due membri per il m.c.m. dei denominatori.	$6\cdot\frac{(x-1)^2-x^2}{2}=6\cdot\frac{x+1}{3}$ $3(x-1)^2-3x^2=2x+2$	$6\cdot\frac{x-4}{2}=6\cdot\frac{(x+2)^2-x^2}{3}$ $3(x-4)=2(.........)^2-.....$
Svolgiamo i calcoli.	$\cancel{3x^2}-6x+3\cancel{-3x^2}=2x+2$ $-6x+3=2x+2$	$3x-.....=2x^2+.....+8-.....$ $3x-.....=8x+.....$
Portiamo i termini con l'incognita al 1° membro e gli altri al 2°.	$-6x-2x=+2-3$	$3x-.....=12+.....$
Riduciamo i termini simili.	$-8x=-1$	$-5x=.....$
Dividiamo i due membri per il coefficiente dell'incognita.	$x=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8}$	$x=.....$

3 **Caccia all'errore.** Nella prima colonna della seguente tabella sono riportate le risoluzioni di alcune equazioni. Nel risolvere le equazioni sono stati commessi, però, vari errori. Individuali e correggili.

Risoluzioni	È corretto?	Eventuale correzione
$3x=x+1\Rightarrow 3x-x=1\Rightarrow 2x=1\Rightarrow$ $\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$	SÌ $\boxed{NO}$	$3x=x+1\Rightarrow 3x-x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}(2x+3)=3\Rightarrow\frac{1}{\cancel{2}}(\cancel{2}x+3)=3\Rightarrow$ $\Rightarrow x+3=3\Rightarrow x=0$	SÌ NO	....
$x+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\Rightarrow x=\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{1-3}{3-2}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=-2$	SÌ NO	....
$2(x+1)=3\Rightarrow 2x+1=3\Rightarrow 2x=2\Rightarrow$ $\Rightarrow x=1$	SÌ NO	....
$9x+10=8x-2\Rightarrow 9x-8x=-2+10\Rightarrow$ $\Rightarrow x=8$	SÌ NO	....

4 Completa la seguente tabella. Tutte le equazioni indicate hanno soluzioni intere.

Grafico			
Soluzione (se esiste) dell'equazione $f(x) = 0$	È l'ascissa del punto (in questo caso l'origine) in cui il grafico di f interseca l'asse x, quindi $x = 0$.	$x =$	$x =$ ....
Soluzione (se esiste) dell'equazione $g(x) = 0$	$x =$	È l'ascissa del punto (in questo caso $(1, 0)$) in cui il grafico di g interseca l'asse x, quindi $x =$	$x =$ ....
Soluzione (se esiste) dell'equazione $f(x) = g(x)$	È l'ascissa del punto (in questo caso $(1, 2)$) in cui i grafici di f e g si intersecano, quindi $x = 1$.	$x =$	$x =$ ....

5 Indica con x un numero. Utilizzando tale incognita, completa la seconda colonna della seguente tabella, traducendo in un'equazione l'espressione verbale posta nella prima colonna.

Espressione verbale	Equazione
La metà di un numero è uguale a 5	$\frac{1}{2}x = 5$
Il doppio di un numero è uguale a 6	....
Un numero aumentato di 5 è uguale a 7	$x + 5 = 7$
Un numero diminuito di 12 è uguale a 8	....
La differenza fra un numero e 10 è 11	....
La differenza fra 10 e un numero è 11	....
Il triplo di un numero è 10	....
Il doppio di un numero diviso per 13 è uguale a 5	....
13 diviso per il doppio di un numero è uguale a 6	$\frac{13}{2x} = 6$
Sottraendo 8 dal doppio di un numero si ottiene 9	$2x - 8 = 9$
5 più il triplo di un numero è uguale a 6	....
Il 15% di un numero è uguale a 10	....

Problemi e modelli

6 Completa la risoluzione dei seguenti problemi.

	Problema 1	**Problema 2**
Testo del problema	«In un parcheggio ci sono auto e moto. In totale ci sono 30 veicoli e tali veicoli hanno complessivamente 104 ruote. Quante auto e quante moto ci sono nel parcheggio?»	«In un parcheggio ci sono auto e moto. In totale ci sono 30 veicoli e tali veicoli hanno complessivamente 99 ruote. Quante auto e quante moto ci sono nel parcheggio?»
1. Individuare dati e obiettivo	**Dati:** • 30 veicoli (auto o moto) • in tutto ci sono .... ruote **Obiettivo:** • numero di auto e numero di moto	**Dati:** • 30 (auto o moto) • in tutto ci sono .... ruote **Obiettivo:** • numero di auto e numero di moto
2. Formalizzazione del problema	Sia x il numero di *auto* del parcheggio. Osserviamo che x dovrà essere un numero naturale. Possiamo scrivere l'equazione: $\underbrace{4\cdot x}_{\text{numero di ruote delle auto}} + \underbrace{2\cdot(\ldots\ldots)}_{\text{numero di ruote delle moto}} = 104$	Sia x il numero di *moto* del parcheggio. Osserviamo che x dovrà essere un numero naturale. Possiamo scrivere l'equazione: $\underbrace{4\cdot(30-x)}_{\text{numero di ruote delle auto}} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{numero di ruote delle moto}} = 99$
3. Risoluzione dell'equazione	Risolviamo l'equazione: $x =$	Risolviamo l'equazione: $x =$ ....
4. Interpretazione della soluzione e risposta	La soluzione trovata (numero di auto) è accettabile in quanto è un numero naturale. Concludiamo che, nel parcheggio, ci sono: .... auto e 30 − .... = ... moto	La soluzione trovata (numero di moto) **non** è accettabile in quanto **non** è un numero .... Concludiamo che la situazione descritta nel problema è impossibile.

7 Al di sotto di ciascun problema è indicata l'equazione che lo formalizza, in cui x indica il numero di risposte *non date*. Completa l'equazione, risolvila e concludi la risoluzione del problema.

Problema 1	**Problema 2**
Un test è formato da 20 domande; l'insegnante assegna 2 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta non data e toglie un punto per ogni risposta sbagliata. Il punteggio totale ottenuto è stato 16 e le risposte sbagliate sono state uguali a quelle non date. Quante sono state le risposte esatte?	Un test è formato da 20 domande; l'insegnante assegna 2 punti per ogni risposta esatta, 0 punti per ogni risposta non data e toglie un punto per ogni risposta sbagliata. Il punteggio totale ottenuto è stato 24 e le risposte sbagliate sono state il doppio di quelle non date. Quante sono state le risposte esatte?
$\underbrace{2(20-\ldots)}_{\text{punteggio relativo alle risposte esatte}} + \underbrace{0\cdot x}_{\text{punteggio relativo alle risposte non date}} - \underbrace{1\cdot x}_{\text{punteggio tolto a causa delle risposte sbagliate}} = \underbrace{\ldots}_{\text{punteggio totale}}$	$\underbrace{\ldots(20-\ldots)}_{\text{punteggio relativo alle risposte esatte}} + \underbrace{0\cdot x}_{\text{punteggio relativo alle risposte non date}} - \underbrace{1\cdot 2x}_{\text{punteggio tolto a causa delle risposte sbagliate}} = \underbrace{\ldots}_{\text{punteggio totale}}$
Problema 3	**Problema 4**
Un test è formato da 20 domande; l'insegnante assegna 3 punti per ogni risposta esatta e toglie un punto per ogni risposta sbagliata o non data. Il punteggio totale ottenuto è stato 28 e le risposte sbagliate sono state tante quante quelle non date. Quante sono state le risposte esatte?	Un test è formato da 20 domande; l'insegnante assegna 3 punti per ogni risposta esatta e toglie un punto per ogni risposta sbagliata o non data. Il punteggio totale ottenuto è stato 20 e le risposte sbagliate sono state il quadruplo di quelle non date. Quante sono state le risposte esatte?
$\underbrace{\ldots(20-\ldots)}_{\text{punteggio relativo alle risposte esatte}} - \underbrace{1\cdot\ldots}_{\text{punteggio tolto a causa delle risposte sbagliate o non date}} = \underbrace{\ldots}_{\text{punteggio totale}}$	$\underbrace{\ldots(20-\ldots)}_{\text{punteggio relativo alle risposte esatte}} - \underbrace{1\cdot 5x}_{\text{punteggio tolto a causa delle risposte sbagliate o non date}} = \underbrace{\ldots}_{\text{punteggio totale}}$

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
non cambiare i segni quando si spostano termini da un membro all'altro	$2x-5=-2x+10 \Rightarrow 2x-2x=-5+10$ **Errato!**	$2x-5=-2x+10 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2x+2x=+5+10$ **Corretto**
confondere termini da spostare da un membro all'altro con fattori da moltiplicare o dividere	1. $3x-7=10 \Rightarrow 3x=-\frac{10}{7}$ 2. $3x=10 \Rightarrow x=10-3$ **Errato!**	1. $3x-7=10 \Rightarrow 3x=10+7$ 2. $3x=10 \Rightarrow x=\frac{10}{3}$ **Corretto**
non riconoscere equazioni impossibili o indeterminate	1. $3x-7=3x+2 \Rightarrow x=7+2$ 2. $0x=0 \Rightarrow x=0$ **Errato!**	1. $3x-7=3x+2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 0x=7+2 \Rightarrow$ impossibile 2. $0x=0 \Rightarrow$ indeterminata **Corretto**
confondere equazioni con soluzione uguale a 0 con equazioni impossibili	$2x=0 \Rightarrow$ impossibile **Errato!**	$2x=0 \Rightarrow x=\frac{0}{2}=0$ **Corretto**
dimenticare l'interpretazione della soluzione di un problema	in un problema l'incognita rappresenta il numero di caramelle contenuto in una scatola; risolvendo l'equazione si trova $x=-\frac{5}{2}$ la soluzione del problema è $-\frac{5}{2}$ **Errato!**	in un problema l'incognita rappresenta il numero di caramelle contenuto in una scatola; risolvendo l'equazione si trova $x=-\frac{5}{2}$ il problema è impossibile poiché la soluzione non può essere né frazionaria né negativa **Corretto**

1 Scrivi le seguenti equazioni in forma normale e stabiliscine il grado.

a. $(x-1)^2=(x+1)^2+x^2$ b. $(x+1)^3=(x-1)^3$ c. $(x-1)(x+1)=1+(x-2)^2$

Stabilisci se quella indicata a fianco è una soluzione dell'equazione.

2 $(x-3)^2=-1$ $x=2$

3 $(2x-3)^2=9$ $x=3$

4 $(x-3)^2=25$ $x=-2$

5 $(2x-3)^2=-81$ $x=-3$

Risolvi le seguenti equazioni.

6 $10^{11}x=10^{12}x$ $10^{11}x=10^{12}$ [0; 10]

7 $-\frac{2}{3}x=x-1$ $0{,}1\,x=x-0{,}2$ $\left[\frac{3}{5}; \frac{2}{9}\right]$

8 $\frac{1}{3}(3x+1)=x$ [Impossibile]

9 $(x-2)^2=(x+2)(x-2)+2(1-x)$ [3]

10 $(2x-1)(2x+1)=(2x-1)^2$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

11 $\frac{x}{2}-\frac{x-3}{4}=-\frac{1}{12}$ $\left[-\frac{10}{3}\right]$

12 $(x-1)(x+2)-(x-3)^2=x+1$ [2]

13 $\frac{(2x-2)^2}{4}-x^2=\frac{x-1}{2}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

14 $(3x-2)^2-(2x+1)^2-(3-x)(3+x)=2(x-3)(3x+1)$ [Indeterminata]

15 $\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2-\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2=\left(\frac{1}{2}x+2\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)-\frac{1}{4}x^2$ $\left[\frac{9}{5}\right]$

16 $\frac{x-1}{3}-\frac{x+1}{6}=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2}$ [Indeterminata]

17 $\frac{x-3}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{1}{6}x-1$ [Impossibile]

18 $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x-\frac{2-x}{12}=2-\frac{x}{4}$ $\left[\frac{13}{7}\right]$

19 $\frac{x(x-1)}{2}-\frac{1}{3}+(x-1)^2=\frac{3}{2}(x+1)(x-3)+\frac{11}{3}$ $[-3]$

20 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}x+\frac{5}{8}\right)-\frac{5x+3}{6}=1$ [Impossibile]

21 $\left(x-\frac{x-6}{6}\right)\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{2x-1}{3}\left(\frac{3x-2}{2}-\frac{3x-1}{3}\right)-\frac{1}{18}x\right]=\frac{1}{48}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

22 $\frac{5}{6}x-(5x+2)\left[\frac{x-1}{2}-\left(x-1-\frac{3x-2}{4}+\frac{4x-1}{6}\right)\right]=\frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}\right)^2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

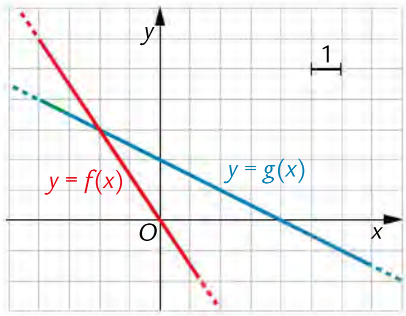
23 Completa l'equazione $x+2=2x+$ .... in modo che abbia come soluzione 0.

24 Completa l'equazione $3x-2=5x-$ .... $-$ .... in modo che risulti indeterminata.

25 Completa l'equazione $3x-2=5x-$ .... $+$ .... in modo che risulti impossibile.

26 Individua dal grafico le soluzioni delle equazioni seguenti (sapendo che sono tutte costituite da numeri interi).

a. $f(x)=0$
b. $g(x)=0$
c. $f(x)=g(x)$
d. $g(x)=1$



27 Dopo aver tracciato i grafici delle funzioni $y=f(x)=\frac{3}{2}x-2$ e $y=g(x)=-2x+5$, interpreta graficamente le seguenti equazioni e cerca di individuare, dal grafico, le loro soluzioni o un intervallo a cui tali soluzioni appartengono:

a. $f(x)=0$ **b.** $g(x)=0$ **c.** $f(x)=g(x)$

Verifica le conclusioni alle quali sei giunto, risolvendo le equazioni algebricamente.

Problemi e modelli

28 **Vero o falso?**

a. Se il numero x supera $\frac{2}{7}x$ di 10 si scrive $x+\frac{2}{7}x=10$. V F

b. Due numeri che hanno somma s si possono indicare con x e $(s-x)$. V F

c. I $\frac{3}{5}$ di un numero x si indicano con $\frac{3}{5}x$. V F

d. Se i $\frac{2}{3}$ di un numero x sono uguali a 34 si può scrivere $x=\frac{2}{3}\cdot 34$. V F

e. L'equazione risolutiva del problema «Trova due numeri sapendo che il primo è $\frac{5}{4}$ del secondo e lo supera di 10» è $\frac{5}{4}x=x-10$, posto il secondo uguale a x. V F

f. L'equazione risolutiva del problema «Trova quel numero x che aumentato di 32 è uguale al suo triplo diminuito di 6» è $x+32=3x-6$. V F

g. L'equazione risolutiva del problema «Trova due numeri conoscendone la somma 58 e la differenza 12» è $x-(58-x)=12$. V F

Disequazioni di primo grado

Sintesi visuale

Disequazione

Disuguaglianza contenente almeno una lettera, detta *incognita*, di cui si cercano i valori che rendono la disuguaglianza vera.

ESEMPIO

$x - \frac{1}{2}x > \frac{1}{3}$ è una disequazione nell'incognita x

Sistema di disequazioni

Insieme di disequazioni che si vuole siano soddisfatte contemporaneamente. Si indica racchiudendo le disequazioni del sistema con una parentesi graffa.

ESEMPI

$\begin{cases} 2x+1 > x \\ 3x-1 < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 > x \\ 2x+3 > x \\ x < 0 \end{cases}$

Classificazione rispetto alle espressioni algebriche nei due membri

Una disequazione si dice **intera** se l'incognita non compare in alcun denominatore; altrimenti si dice **fratta** (o **frazionaria**).

ESEMPI

Sono disequazioni intere:

$x^2 - 3x \leq 1$ $\quad$ $x - \frac{3}{2}x > \frac{1}{3}$ Ai denominatori ci sono numeri, mai l'incognita

Sono disequazioni fratte:

$x - \frac{3}{2x} < 1$ $\quad$ $x^{-1} - 3x \geq 5$ equivale a $\frac{1}{x}$

Disequazione in forma normale

Disequazione della forma $A(x) < 0$ o $A(x) > 0$ o $A(x) \leq 0$ o $A(x) \geq 0$ dove il polinomio $A(x)$ è in forma normale.

ESEMPI

È in forma normale:

$x^2 - 3x + 5 > 0$

Non è in forma normale:

$x^2 - 3x < 4x + 2x^2$

Grado di una disequazione

Grado del polinomio al primo membro, una volta che la disequazione è ridotta in forma normale.

ESEMPIO

$x^2 + 3x + 1 > x^2$

forma normale

$3x + 1 > 0$ disequazione di primo grado

Soluzione di una disequazione in una incognita

Un numero che, sostituito nella disequazione al posto dell'incognita, la trasforma in una disuguaglianza vera.

ESEMPI

0 è una *soluzione* della disequazione $2x + 1 > 0$ perché, sostituendo 0 al posto di x, otteniamo la disuguaglianza $2 \cdot 0 + 1 > 0$, ossia $1 > 0$, che è vera.

-1 **non** è una *soluzione* della disequazione $2x + 1 > 0$ perché, sostituendo -1 al posto di x, otteniamo la disuguaglianza $2 \cdot (-1) + 1 > 0$, ossia $-1 > 0$, che è falsa.

Disequazioni equivalenti

Disequazioni che hanno lo stesso insieme delle soluzioni.

ESEMPI

$x > 2$ e $2x > 4$ sono equivalenti perché hanno entrambe come insieme delle soluzioni $x > 2$.

Principi di equivalenza per le disequazioni

Regole	ESEMPI		
	Disequazione originaria		Disequazione equivalente
Valgono le stesse regole già enunciate per le equazioni per quanto riguarda: • aggiungere un termine ad ambo i membri;	$3x - 7 > 10$	→ Sommiamo a entrambi i membri il numero 7.	→ $3x - 7 + 7 > 10 + 7$
• trasportare un termine da un membro all'altro;	$3x - 7 > 10$	→ Trasportiamo -7 al secondo membro.	→ $3x > 10 + 7$
• sopprimere un termine uguale ad ambo i membri.	$\cancel{x^2} + 3x - 7 > \cancel{x^2} + 10$	→ Sopprimiamo i due termini di secondo grado.	→ $3x - 7 > 10$
Si possono moltiplicare o dividere entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero: • **positivo**, lasciando invariato il verso della disequazione;	$4x > 12$	→ Dividiamo entrambi i membri per 4.	→ $x > 3$
• **negativo**, **cambiando il verso** della disequazione.	$-3x > -15$	→ Dividiamo entrambi i membri per -3 e cambiamo il verso della disequazione.	→ $x < 5$

Disequazione numerica intera di primo grado in forma normale

Disequazione in forma normale
1. $ax > b$
2. $ax \geq b$
3. $ax < b$
4. $ax \leq b$

$a > 0$

1. $x > \frac{b}{a}$
2. $x \geq \frac{b}{a}$
3. $x < \frac{b}{a}$
4. $x \leq \frac{b}{a}$

ESEMPIO
$5x \geq 10 \Rightarrow \frac{5x}{5} \geq \frac{10}{5} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geq 2$

$a < 0$

1. $x < \frac{b}{a}$
2. $x \leq \frac{b}{a}$
3. $x > \frac{b}{a}$
4. $x \geq \frac{b}{a}$

ESEMPIO
$-3x \geq 6 \Rightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{6}{-3} \Rightarrow$
$\Rightarrow x \leq -2$

$a = 0$

può essere **impossibile** oppure **sempre verificata**

ESEMPI

1. $0 \cdot x < -2 \Rightarrow \underbrace{0 < -2}_{\text{falso!}} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ impossibile

2. $0 \cdot x \geq -1 \Rightarrow \underbrace{0 \geq -1}_{\text{vero!}} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ verificata per ogni x reale

Metodo risolutivo di una generica disequazione di primo grado numerica intera

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $2(x - 1) \geq 5x + 5$.

$2(x - 1) \geq 5x + 5$

$2x - 2 \geq 5x + 5$

$-3x \geq 7$

$x \leq -\frac{7}{3}$

METODO

È analogo a quello per la risoluzione delle equazioni numeriche intere, ma occorre prestare attenzione a *cambiare il verso* della disequazione quando si dividono i due membri per un numero *negativo*.

Metodo risolutivo di un sistema di disequazioni

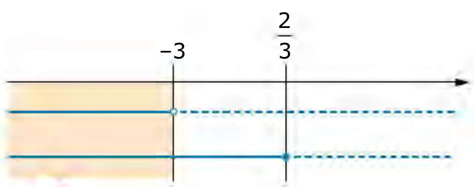
ESEMPIO

Risolviamo il sistema $\begin{cases} 2x - 1 > 4x + 5 \\ \frac{x}{2} \leq \frac{1}{3} \end{cases}$.

$\begin{cases} 2x - 4x > 1 + 5 \\ 6 \cdot \frac{x}{2} \leq 6 \cdot \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x > 6 \\ 3x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x \leq \frac{2}{3} \end{cases}$

Costruiamo lo schema degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni:



Intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni (corrisponde alla parte in cui compare unalinea continua su tutte le righe)

Ne deduciamo che il sistema è soddisfatto per $x < -3$.

METODO

1. Si risolvono le singole disequazioni del sistema.
2. Si rappresentano gli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni e si deduce dallo schema l'insieme che corrisponde alla loro intersezione.
3. L'insieme intersezione è l'insieme delle soluzioni del sistema.