Radicali e proprietà invariantiva

Radice *n*-esima con *n* pari

La radice *n*-esima, con *n* pari, di un numero reale non negativo *a*, indicata con $\sqrt[n]{a}$, è l'unico numero *non negativo* che, elevato a *n*, dà come risultato *a*.
La radice *n*-esima di *a*, se *n* è pari, è definita se solo se $a \geq 0$.

ESEMPI

$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt[4]{16} = 2$ $\sqrt{-9}$ non è definito

Radice *n*-esima con *n* dispari

La radice *n*-esima, con *n* dispari, di un numero reale *a*, indicata con $\sqrt[n]{a}$, è l'unico numero reale che, elevato a *n*, dà come risultato *a*. La radice *n*-esima di *a*, se *n* è dispari, è definita per ogni $a \in \mathbf{R}$.

ESEMPI

$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{-27} = -3$
$\sqrt[5]{32} = 2$ $\sqrt[5]{-1} = -1$

Radicale

Ogni espressione del tipo $\sqrt[n]{a}$, dove *n* è un numero intero positivo e *a* può essere un'espressione numerica o letterale.

ESEMPIO

$\underbrace{\sqrt[7]{3x+5}}_{\text{radicale}}$

indice: 7 — radicando: $3x + 5$

Proprietà invariantiva

$\underbrace{\sqrt[n]{a^m}}_{\text{Un radicale}} \underbrace{=}_{\text{non cambia}} \underbrace{\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}}_{\text{moltiplicando l'indice e l'esponente del radicando per uno stesso numero } p}$, con $a \geq 0$

ESEMPIO

$\sqrt[5]{3^4} = \sqrt[5 \cdot 7]{3^{4 \cdot 7}}$

moltiplicando per 7 indice e esponente

Procedimento per semplificare un radicale

ESEMPIO

$\sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[3]{2^2}$

METODO

1. Si scompone il radicando in fattori.
2. Si applica la proprietà invariantiva, dividendo gli esponenti dei fattori del radicando e l'indice del radicale per il loro massimo comune divisore (in questo caso 2).

Procedimento per ridurre due o più radicali allo stesso indice

ESEMPIO

Riduciamo allo stesso indice $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{2}$.

$6 = \text{m.c.m.}(2, 3)$

$\sqrt{3} = \sqrt[2 \cdot 3]{3^{1 \cdot 3}} = \sqrt[6]{3^3}$; $\sqrt[3]{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^2}$

I radicali ridotti al minimo comune indice sono:

$\sqrt[6]{3^3}$ e $\sqrt[6]{2^2}$

METODO

1. Si calcola il minimo comune multiplo degli indici dei radicali di partenza.
2. Si applica la proprietà invariantiva, moltiplicando gli indici dei radicali e gli esponenti dei fattori dei radicandi per opportuni fattori in modo da ottenere radicali equivalenti di indice uguale al m.c.m.

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti espressioni.

13 $\sqrt{12x-24}$ $[x \geq 2]$

14 $\sqrt{(2x-1)^2-4x^2}$ $\left[x \leq \frac{1}{4}\right]$

15 $\sqrt[3]{3x-10}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

16 $\sqrt{(2x-1)(3x+1)-6x^2}$ $[x \leq -1]$

17 $\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}}$ $\left[x \leq \frac{2}{3}\right]$

18 $\sqrt{10x^2+5}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

19 $\sqrt{4x^2+4x+1}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

20 $\frac{x+1}{\sqrt{11x+88}}$ $[x > -8]$

21 $\sqrt{-x}+\sqrt{x+8}$ $[-8 \leq x \leq 0]$

22 $\sqrt[3]{x}+\sqrt{\frac{2}{3}x-\frac{x-1}{2}}$ $[x \geq -3]$

23 $\sqrt[5]{\frac{x-1}{2}}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

24 $\sqrt[10]{\frac{1}{3}-\frac{x+2}{4}}$ $\left[x \leq -\frac{2}{3}\right]$

25 $\sqrt[6]{(2x-3)^2-(2x-3)(2x+3)}$ $\left[x \leq \frac{3}{2}\right]$

26 $\frac{x}{\sqrt{2x^2+8}}$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

27 $\sqrt{1-\frac{x}{2}}+\sqrt{2x+8}+\sqrt[3]{x+10}$ $[-4 \leq x \leq 2]$

28 $\sqrt{x^2-(x+3)^2}+\sqrt{\frac{x-1}{5}-\frac{x}{2}}$ $\left[x \leq -\frac{3}{2}\right]$

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali, supponendo che tutte le lettere possano assumere solo valori non negativi.

29 $\sqrt[4]{2^6 \cdot 3^4}$ $\quad\sqrt[6]{2^3 \cdot 5^6}$ $\quad\sqrt[12]{2^6 \cdot 3^{15} \cdot 7^9}$ $[\sqrt{2^3 \cdot 3^2};\ \sqrt{2 \cdot 5^2};\ \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^5 \cdot 7^3}]$

30 $\sqrt[4]{25 \cdot 9}$ $\quad\sqrt[4]{144}$ $\quad\sqrt[3]{2^6 \cdot 27}$ $[\sqrt{15};\ \sqrt{12};\ 12]$

31 $\sqrt[6]{144}$ $\quad\sqrt[8]{144}$ $\quad\sqrt[9]{27}$ $[\sqrt[3]{12};\ \sqrt[4]{12};\ \sqrt[3]{3}]$

32 $\sqrt[6]{a^9}$ $\quad\sqrt{a^6}$ $\quad\sqrt[9]{a^6}$ $[\sqrt{a^3};\ a^3;\ \sqrt[3]{a^2}]$

33 $\sqrt{x^4y^6}$ $\quad\sqrt[4]{9x^6y^{12}}$ $[x^2y^3;\ \sqrt{3x^3y^6}]$

34 $\sqrt{a^4b^{16}}$ $\quad\sqrt[4]{16a^6b^8}$ $[a^2b^8;\ \sqrt{4a^3b^4}]$

35 $\sqrt{x^9y^8}$ $\quad\sqrt[8]{x^8y^{16}}$ [Irriducibile; xy^2]

Riduci i seguenti radicali allo stesso indice.

36 $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[15]{2},\ \sqrt[5]{2}$ $[\sqrt[15]{2^5};\ \sqrt[15]{2};\ \sqrt[15]{2^3}]$

37 $\sqrt{a},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt[4]{a}$, con $a \geq 0$ $[\sqrt[12]{a^6};\ \sqrt[12]{a^4};\ \sqrt[12]{a^3}]$

38 $\sqrt{a},\ \sqrt[4]{a},\ \sqrt[5]{a}$, con $a \geq 0$ $[\sqrt[20]{a^{10}};\ \sqrt[20]{a^5};\ \sqrt[20]{a^4}]$

39 Completa le seguenti uguaglianze in modo che risultino corrette, supponendo che tutte le lettere possano assumere solo valori non negativi.

a. $\sqrt[\dots]{x^4y^4z^{\dots}} = \sqrt{x^2y^{\dots}z^6}$ **b.** $\sqrt[\dots]{64} = \sqrt[3]{4}$ **c.** $\sqrt[3]{x^5y^{\dots}z^3} = \sqrt[\dots]{x^{15}y^6z^{\dots}}$

Disponi i radicali dei seguenti gruppi in ordine crescente.

40 $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{4},\ \sqrt[5]{5},\ \sqrt{7}$

41 $\sqrt{5},\ \sqrt[3]{6},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt{3}$

Operazioni tra radicali

Sintesi visuale

Prodotto, quoziente, potenza e radice di radice

Regola	Condizione di validità	ESEMPI
$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	• Se n è pari: $a\geq 0$ e $b\geq 0$. • Se n è dispari: per ogni $a, b\in\mathbf{R}$.	$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8\cdot 2}=\sqrt{16}=4$ $\sqrt[3]{2x^2}\cdot\sqrt[3]{4x}=\sqrt[3]{2x^2\cdot 4x}=\sqrt[3]{8x^3}=2x$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	• Se n è pari: $a\geq 0$ e $b>0$. • Se n è dispari: per ogni $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}-\{0\}$.	$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$
$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$	• Se n è pari: $a\geq 0$. • Se n è dispari: per ogni $a\in\mathbf{R}$.	$(\sqrt[3]{a^5})^2=\sqrt[3]{(a^5)^2}=\sqrt[3]{a^{10}}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$	• Se n è pari o m è pari: $a\geq 0$. • Se n e m sono dispari: per ogni $a\in\mathbf{R}$.	$\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[3\cdot 5]{2}=\sqrt[15]{2}$

Procedimento per eseguire un trasporto fuori dal segno di radice

Trasporto fuori dal segno di radice quadrata

ESEMPIO

$\sqrt{12}=$

$=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

Si scompone il radicando mettendo in evidenza i quadrati perfetti

Il fattore 2 è stato trasportato fuori dal segno di radice

Trasporto fuori dal segno di radice cubica

ESEMPIO

$\sqrt[3]{16}=$

$=\sqrt[3]{8\cdot 2}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2}=2\sqrt[3]{2}$

Si scompone il radicando mettendo in evidenza i cubi perfetti

Il fattore 2 è stato trasportato fuori dal segno di radice

Trasporto fuori dal segno di radice di indice quattro

ESEMPIO

$\sqrt[4]{a^{19}}=$

$=\sqrt[4]{a^{16}\cdot a^3}=\sqrt[4]{a^{16}}\cdot\sqrt[4]{a^3}=a^4\sqrt[4]{a^3}$

a^{16} è la più alta potenza di esponente multiplo di 4 che divide a^{19}

Trasporto fuori dal segno di radice n-esima

$$\sqrt[n]{a^m b}=\underbrace{\sqrt[n]{a^{nq+r}b}=\sqrt[n]{a^{nq}a^r b}=\sqrt[n]{a^{nq}}\cdot\sqrt[n]{a^r b}=a^q\sqrt[n]{a^r b}}$$

q e r sono quoziente e resto della divisione tra m e n

Procedimento per eseguire un trasporto dentro al segno di radice

Trasporto dentro al segno di radice di un fattore numerico

ESEMPIO

Trasportiamo il fattore «2» dentro al segno di radice:

$2\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2^3\cdot 2}=\sqrt[3]{16}$

Si scrive il fattore 2 sottoforma di radicale

Si esegue la moltiplicazione

Trasporto dentro al segno di radice di un fattore letterale

ESEMPIO

Trasportiamo il fattore «$3a$» dentro al segno di radice. Occorre distinguere due casi a seconda del segno di a:

$$3a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{9a^2}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{9a^2b} & \text{se } a\geq 0\\ -\sqrt{9a^2}\cdot\sqrt{b}=-\sqrt{9a^2b} & \text{se } a<0\end{cases}$$

Il segno meno è necessario per mantenere la concordanza di segno tra le due espressioni

Radicali simili e semplificazione di somme algebriche di radicali

Radicali simili

Due radicali (o due espressioni costituite dal prodotto tra un radicale e un numero), si dicono **simili** se i due radicali hanno lo stesso indice e lo stesso radicando.

ESEMPI

Sono simili:
$3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

Non sono simili:
$3\sqrt{2}$ e $2\sqrt{3}$ — Radicando diverso
$3\sqrt{2}$ e $2\sqrt[3]{2}$ — Indice diverso

Somme algebriche di radicali simili

Si possono semplificare utilizzando la proprietà distributiva.

ESEMPI

$2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=(2+3)\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

$3\sqrt{2}-\sqrt{2}=(3-1)\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

Somme algebriche di radicali

Si possono semplificare se, tramite semplificazioni o trasporti fuori dal segno di radice, si riescono a mettere in evidenza dei termini simili.

ESEMPI

$\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{2}+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{2}-\sqrt{12}=\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, ma non è semplificabile perché non ci sono termini simili.

Razionalizzazioni

Razionalizzare un'espressione significa scriverne una equivalente in cui non compaiano radicali al denominatore.

Espressione	$\dfrac{x}{\sqrt{y}}$	$\dfrac{x}{\sqrt[3]{y}}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$	$\dfrac{c}{a\pm\sqrt{b}}$	$\dfrac{c}{\sqrt{a}\pm b}$
Fattore razionalizzante	Si moltiplicano numeratore e denominatore per: $\sqrt{y}$	Si moltiplicano numeratore e denominatore per: $\sqrt[3]{y^2}$	Si moltiplicano numeratore e denominatore per: $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$	Si moltiplicano numeratore e denominatore per: $a\mp\sqrt{b}$	Si moltiplicano numeratore e denominatore per: $\sqrt{a}\mp b$
ESEMPI	$\dfrac{10}{\sqrt{2}}=\dfrac{10\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{10\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$	$\dfrac{8}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{8\cdot\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}}=\dfrac{8\sqrt[3]{4}}{2}=4\sqrt[3]{4}$	$\dfrac{9}{3-\sqrt{3}}=\dfrac{9\cdot(3+\sqrt{3})}{\underbrace{(3-\sqrt{3})\cdot(3+\sqrt{3})}_{9-3}}=\dfrac{9(3+\sqrt{3})}{6}=\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{2}$		

Potenze con esponente razionale

Definizioni di $x^{\frac{m}{n}}$ con $x\geq 0$	**ESEMPI**
Se $\dfrac{m}{n}>0$: $x^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{x^m}$	• $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5^1}=\sqrt[3]{5}$ • $6^{\frac{7}{3}}=\sqrt[3]{6^7}=36\sqrt[3]{6}$ • $2^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{2^3}=2\sqrt{2}$
Se $\dfrac{m}{n}=0$ e $x\neq 0$: $x^0=1$	• $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$
Se $\dfrac{m}{n}<0$ e $x\neq 0$: $x^{\frac{m}{n}}=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{m}{n}}$	• $27^{-\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{27}}=\dfrac{1}{3}$ • $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$

Esercizi guidati

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a eseguire alcune operazioni con i radicali; supponi che tutte le lettere rappresentino numeri positivi.

1 $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{18\cdot\ldots} = \sqrt{\ldots} = \ldots$

2 $\left(\sqrt[3]{2xy^2}\right)^6 = \sqrt[3]{(2xy^2)^6} = (2xy^2)^{\ldots} = \ldots$

3 $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[\ldots]{5}$

4 $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt[6]{a^{\ldots}}\cdot\sqrt[6]{b^{\ldots}} = \sqrt[6]{\ldots}$

5 $\sqrt{8x^3y^7} : \sqrt{2xy} = \sqrt{4x^{\ldots}y^{\ldots}} = 2x^{\ldots}y^{\ldots}$

6 $\sqrt[4]{8} : \sqrt{2} = \sqrt[4]{8} : \sqrt[4]{2^{\ldots}} = \sqrt[4]{\ldots}$

Come primo passaggio devi ridurre i due radicali allo stesso indice

Completa le seguenti uguaglianze, dove ti guidiamo a eseguire dei trasporti fuori dal segno di radice.

7 $\sqrt{75} = \sqrt{25\cdot\ldots} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{\ldots} = \ldots\sqrt{\ldots}$

8 $\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{1000\cdot\ldots} = \sqrt[3]{1000}\cdot\sqrt[3]{\ldots} = \ldots\sqrt[3]{\ldots}$

9 $\sqrt{0{,}03} = \sqrt{0{,}01\cdot\ldots} = \sqrt{0{,}01}\cdot\sqrt{\ldots} = \frac{1}{\ldots}\sqrt{\ldots}$

10 $\sqrt[3]{-24} = \sqrt[3]{-8\cdot\ldots} = \sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{\ldots} = \ldots\sqrt[3]{\ldots}$

Completa le seguenti uguaglianze, dove ti guidiamo a eseguire dei trasporti dentro il segno di radice.

11 $3\sqrt{7} = \sqrt{3^{\ldots}}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{\ldots\cdot 7} = \sqrt{\ldots}$

12 $3\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{3^{\ldots}}\cdot\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{3^3\cdot 10} = \sqrt[3]{\ldots}$

13 $-5\sqrt{3} = -\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{\ldots} = -\sqrt{5^2\cdot\ldots} = -\sqrt{\ldots}$

14 Se $x \geq 0$, allora $x\sqrt{6} = \sqrt{\ldots}\cdot\sqrt{6} = \sqrt{\ldots}$

15 Se $x < 0$, allora $x\sqrt{6} = -\sqrt{\ldots}\cdot\sqrt{6} = -\sqrt{\ldots}$

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a semplificare alcune espressioni contenenti radicali simili.

16 $\sqrt{20}+\sqrt{45} = \sqrt{4\cdot\ldots}+\sqrt{9\cdot\ldots} = 2\sqrt{\ldots}+3\sqrt{\ldots} = \ldots\sqrt{\ldots}$

17 $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\ldots\cdot 2}+\sqrt[3]{\ldots\cdot 2} = \ldots\sqrt[3]{2}+\ldots\sqrt[3]{2} = \ldots\sqrt[3]{2}$

18 $\sqrt{100a}-\sqrt{49a} = \ldots\sqrt{a}-7\sqrt{\ldots} = \ldots\sqrt{\ldots}$, con $a \geq 0$

Completa le seguenti uguaglianze, in cui ti guidiamo a razionalizzare alcune espressioni.

19 $\frac{15}{\sqrt{5}} = \frac{15\cdot\sqrt{\ldots}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{\ldots}} = \frac{15\sqrt{\ldots}}{5} = \ldots\sqrt{\ldots}$

20 $\frac{a^5}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^5\cdot\sqrt[3]{a^{\ldots}}}{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^{\ldots}}} = \frac{a^5\sqrt[3]{a^{\ldots}}}{\ldots} = \ldots$

21 $\frac{\sqrt{11}+1}{\sqrt{11}-1} = \frac{(\sqrt{11}+1)(\sqrt{11}+\ldots)}{(\sqrt{11}-1)(\sqrt{11}+\ldots)} = \frac{(\sqrt{11}+1)^2}{11-\ldots} = \frac{12+\ldots\sqrt{\ldots}}{\ldots} = \frac{6+\ldots}{\ldots}$

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
non ridurre i radicali allo stesso indice in una moltiplicazione o in una divisione	**1.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[5]{4}$ **2.** $\sqrt{a^2b^3}:\sqrt[5]{a^2b^3}=\sqrt[5]{1}=1$ **Errato!**	**1.** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[6]{2^3}\cdot\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[6]{2^5}$ **2.** $\sqrt{a^2b^3}:\sqrt[5]{a^2b^3}=$ $=\sqrt[10]{(a^{10}b^{15}):(a^4b^6)}=\sqrt[10]{a^6b^9}$ **Corretto**
commettere errori di concordanza di segno nel trasporto di un fattore dentro un radicale	**1.** $-2\sqrt{2}=\sqrt{(-2)^2\cdot 2}=\sqrt{8}$ **2.** $x\sqrt{7}=\sqrt{x^2\cdot 7}=\sqrt{7x^2}$ per ogni $x\in\mathbf{R}$ **Errato!**	**1.** $-2\sqrt{2}=-\sqrt{2^2\cdot 2}=-\sqrt{8}$ **2.** $x\sqrt{7}=\begin{cases}\sqrt{x^2\cdot 7} & x\geq 0\\ -\sqrt{x^2\cdot 7} & x<0\end{cases}$ **Corretto**
sommare o sottrarre in modo errato radicali non simili	**1.** $\sqrt{5}+\sqrt{3}=\sqrt{5+3}=\sqrt{8}$ **2.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}=\sqrt{5-3}=\sqrt{2}$ **Errato!**	**1.** $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ rimane così perché i due radicali non sono simili **2.** $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ rimane così perché i due radicali non sono simili **Corretto**
stabilire in modo errato il fattore razionalizzante di un denominatore	**1.** $\frac{1}{\sqrt{a-b}}=\frac{1}{\sqrt{a-b}}\cdot\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=\frac{\sqrt{a+b}}{a-b}$ **2.** $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a\sqrt[3]{b}}{b}$ **3.** $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4-3}$ **Errato!**	**1.** $\frac{1}{\sqrt{a-b}}=\frac{1}{\sqrt{a-b}}\cdot\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a-b}}=\frac{\sqrt{a-b}}{a-b}$ **2.** $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a}{\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}}=\frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$ **3.** $\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=$ $=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=$ $=2+\sqrt{3}$ **Corretto**

Semplifica le seguenti espressioni; supponi che tutte le lettere possano assumere solo valori non negativi.

1 $\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$ $[6]$

2 $\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}$ $[3]$

3 $(\sqrt[4]{5^6})^2$ $[125]$

4 $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ $[\sqrt[6]{5}]$

5 $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$ $[2]$

6 $(\sqrt[4]{2})^3:(\sqrt[3]{2})^2$ $[\sqrt[12]{2}]$

7 $\frac{(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{3})^2}{(\sqrt{3})^3}$ $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right]$

8 $\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[5]{3}}{\sqrt[10]{3}}$ $[\sqrt[5]{3^3}]$

9 $\sqrt{2x^3y}\cdot\sqrt{8xy^7}$ $[4x^2y^4]$

10 $\frac{\sqrt{4x^2y^4}}{\sqrt[3]{2xy}}$ $[\sqrt[3]{4x^2y^5}]$

11 $(\sqrt[3]{2xy^2})^6$ $[4x^2y^4]$

12 $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a^3b}$ $[a^2b]$

13 $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b^8}$ $[ab^3]$

14 $(\sqrt[3]{ab})^6$ $[a^2b^2]$

15 $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$ $[\sqrt[3]{a^2}]$

16 $\sqrt{ab}\cdot\sqrt[3]{a}$ $[\sqrt[6]{a^5b^3}]$

17 $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}$ $[\sqrt[6]{a^2b^3}]$

Radicali e valore assoluto

Sintesi visuale

Procedimento per semplificare radicali o eseguire trasporti fuori dal segno di radice, nel caso di radicali dipendenti da variabili di cui non si conosce il segno.

Radicali di indice dispari

Si può operare come se le variabili fossero non negative, senza introdurre valori assoluti perché, se n è dispari, l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

vale per ogni $a \in \mathbf{R}$.

Radicali di indice pari

Si determinano le condizioni di esistenza (C.E.) dei radicali.

Si stabilisce se, in base alle C.E., è possibile utilizzare l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

valida per $a \geq 0$.

In caso contrario, occorre utilizzare l'uguaglianza

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|$$

valida per ogni $a \in \mathbf{R}$.

ESEMPI

Semplifichiamo:

- $\sqrt{x^4 y^2}$ $\Rightarrow$ C.E.: nessuna, poiché $x^4 y^2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e per ogni $y \in \mathbf{R}$. $\Rightarrow$ $\sqrt{x^4 y^2} = \sqrt{(x^2 y)^2} = |x^2 y|$
  Dobbiamo utilizzare il valore assoluto perché le C.E. non implicano che sia $x^2 y \geq 0$.
- $\sqrt{a^2 + 6a + 9}$ $\Rightarrow$ C.E.: nessuna, poiché $a^2 + 6a + 9 = (a+3)^2$ e quindi il radicando è sempre non negativo. $\Rightarrow$ $\sqrt{a^2 + 6a + 9} = \sqrt{(a+3)^2} = |a+3|$
  Dobbiamo utilizzare il valore assoluto perché le C.E. non implicano che sia $a + 3 \geq 0$.

ESEMPI

Trasportiamo fuori dal segno di radice:

- $\sqrt{x^3(y^2+1)}$ $\Rightarrow$ C.E.: $x \geq 0$ (perché?) $\Rightarrow$ $\sqrt{x^3(y^2+1)} = \sqrt{x^2 \cdot x(y^2+1)} = \sqrt{x^2}\sqrt{x(y^2+1)} = x\sqrt{x(y^2+1)}$
  $\sqrt{x^2} = x$, senza valore assoluto, perché le C.E. garantiscono che $x \geq 0$.
- $\sqrt[3]{x^{10} y}$ $\Rightarrow$ C.E.: nessuna, poiché il radicale ha indice dispari. $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{x^{10} y} = \sqrt[3]{x^9 \cdot xy} = \sqrt[3]{x^9} \cdot \sqrt[3]{xy} = x^3 \sqrt[3]{xy}$
  Non dobbiamo inserire i valori assoluti perché il radicale ha indice dispari.

Sistemi lineari

Sintesi visuale

Sistema di equazioni

Insieme di due o più equazioni che si vuole siano soddisfatte contemporaneamente. Si indica scrivendo le equazioni una al di sotto dell'altra e racchiudendole con una parentesi graffa posta alla loro sinistra.

ESEMPI

Sono sistemi di due equazioni nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} x+y=-2 \\ x+3y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^3=-2 \\ x+3y^2=1 \end{cases}$$

Grado di un sistema intero

Prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono.

ESEMPIO

$$\begin{cases} x^2+y^3=-2 & \Rightarrow \text{equazione di grado } 3 \\ xy=1 & \Rightarrow \text{equazione di grado } 2 \end{cases}$$

Il sistema ha grado $2 \cdot 3 = 6$.

Sistema lineare

Sistema di primo grado.
Un sistema lineare di due equazioni, nelle due incognite x e y, si dice in forma normale quando è nella forma

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'x=c' \end{cases}$$

Soluzione di un sistema

Per un sistema nelle incognite x e y è una *coppia ordinata* di numeri reali che, sostituiti rispettivamente al posto di x e y nelle equazioni del sistema, le soddisfano tutte.

ESEMPIO

$(-1, 1)$ è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x+3y=2 \\ 5x+4y=-1 \end{cases}$$

perché sostituendo -1 al posto di x e 1 al posto di y si ottengono due uguaglianze entrambe vere.

$$\begin{cases} -1+3\cdot 1 = 2 \Rightarrow 2=2 & \text{Vero!} \\ (-1)+4\cdot 1 = -1 \Rightarrow -1=-1 & \text{Vero!} \end{cases}$$

Classificazione di un sistema

Un sistema si dice:

- **determinato** se ha un numero finito di soluzioni;
- **indeterminato** se ha infinite soluzioni;
- **impossibile** se non ha soluzioni.

Risoluzione tramite il metodo di sostituzione

ESEMPIO

Equazione risolvente

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ 3x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ \boxed{3x-(7-2x)=3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-2x \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=7-2\cdot 2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

METODO

1. Si risolve una delle due equazioni rispetto a una delle due incognite.

2. Sostituendo l'espressione trovata (in rosso) nell'altra equazione si ottiene l'equazione risolvente.

3. Si risolve l'equazione risolvente.

4. Si sostituisce il valore di x trovato nell'altra equazione per ricavare il valore di y.

Risoluzione tramite il metodo di addizione e sottrazione

ESEMPIO

$$\begin{cases} 6x+y=-2 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{12x+2y}^{2\cdot(6x+y)} = \overbrace{-4}^{2\cdot(-2)} \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overbrace{9x=-9}^{\text{Equazione risolvente}} \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3(-1)+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$$

METODO

1. Si moltiplicano i due membri di una delle due equazioni in modo da ottenere due equazioni con due termini uguali o opposti.

2. Si sottrae dalla prima equazione la seconda: si ottiene un'equazione nella sola x.

3. Si risolve l'equazione risolvente.

4. Si sostituisce il valore di x trovato nell'altra equazione per ricavare il valore di y.

Risoluzione tramite il metodo di Cramer

Determinante

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}}_{\text{Tabella formata da quattro numeri detta matrice}} \xrightarrow{\text{A una tabella di questo tipo si associa un numero, detto determinante.}} \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}_{\text{Simbolo che indica il determinante}} = \underbrace{a_1 b_2 - a_2 b_1}_{\text{Il determinante si calcola sottraendo dal prodotto degli elementi in rosso il prodotto degli elementi in azzurro}}$$

Teorema di Cramer

Dato il sistema $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ con almeno uno dei quattro coefficienti a, b, a', b' diverso da zero, e definiti i tre determinanti

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

vale quanto segue:

- se $D \neq 0$ il sistema è *determinato* e ha come soluzione $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$;
- se $D = 0$ e $D_x \neq 0$ o $D_y \neq 0$ il sistema è *impossibile*;
- se $D = D_x = D_y = 0$ il sistema è *indeterminato.*

ESEMPIO

$$\begin{cases} 2x+y=7 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -5 \\ D_x &= \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7\cdot(-1) - 3\cdot 1 = -10 \\ D_y &= \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 3\cdot 7 = -15 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{-10}{-5} = 2 \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-15}{-5} = 3 \end{cases}$$

Calcolo dei determinanti associati al sistema

Calcolo della soluzione con il teorema di Cramer

Esercizi guidati

1 Completa la terza colonna della tabella, seguendo i passi indicati e l'esempio svolto. Ti guidiamo ad applicare il metodo di sostituzione.

Passi del procedimento	**Risolvere il sistema:** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$	**Risolvere il sistema:** $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$
Risolvi una delle due equazioni, rispetto a una delle due incognite.	$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x + 3y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \text{.........} \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$ Perché ricavare x dalla prima equazione è la scelta più conveniente? ....
Sostituisci l'espressione trovata nell'altra equazione.	$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 2x + 3(2x - 1) = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \text{.........} \\ 3(\text{..................}) - 4y = 2 \end{cases}$
Risolvi l'equazione risolvente ottenuta.	$2x + 3(2x - 1) = -2$ $2x + 6x - 3 = -2$ $8x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{8}$	$3(\text{..................}) - 4y = 2$ .... $\Rightarrow y =$ ....
Sostituisci il valore dell'incognita trovato al passo precedente nell'equazione esplicitata al primo passo.	$\begin{cases} y = 2 \cdot \frac{1}{8} - 1 = -\frac{3}{4} \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 2(\text{.........}) - 1 \\ y = \text{..............} \end{cases}$
Concludi.	La soluzione del sistema è la coppia ordinata $\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{4}\right)$.	La soluzione del sistema è la coppia ordinata ....

2 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere un sistema con il metodo di addizione e sottrazione.

Passi del procedimento	**Risolvere il sistema:** $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$
Somma membro a membro le due equazioni e risolvi l'equazione ottenuta.	$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$ $+$ $(x - y) + (x + y) = 5 + (-3)$ $\Rightarrow 2x = \text{.........} \Rightarrow x = \text{.........}$
Sottrai dalla prima equazione la seconda e risolvi l'equazione ottenuta.	$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -3 \end{cases}$ $-$ $(x - y) - (x + y) = 5 - (\text{.........})$ $\Rightarrow -2y = \text{.........} \Rightarrow y = \text{.........}$
Concludi.	La soluzione del sistema è ....

3 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere un sistema con il metodo di addizione e sottrazione.

Passi del procedimento	**Risolvere il sistema:** $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = -3 \end{cases}$
Per fare in modo che, sommando le equazioni del sistema, si «elimini», per esempio, l'incognita y, occorre trasformare le due equazioni del sistema in modo che i coefficienti di y risultino opposti. A tale scopo, moltiplica i due membri della *prima* equazione per 4 e i due membri della *seconda* equazione per 3.	$\begin{cases} 4 \cdot (2x - 3y) = 4 \cdot 5 \\ 3(3x + 4y) = 3 \cdot (-3) \end{cases}$ $\Downarrow$ $\begin{cases} 8x - 12y = 20 \\ 9x + \ldots\ldots = \ldots\ldots \end{cases}$
Somma membro a membro le equazioni dell'ultimo sistema ottenuto e risolvi l'equazione a cui si giunge.	$17x = \ldots\ldots \Rightarrow x = \ldots\ldots$
Sostituisci il valore di x appena trovato nella prima equazione del sistema originario e risolvi l'equazione ottenuta.	$2 \cdot \frac{\ldots\ldots}{17} - 3y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \ldots\ldots$
Concludi.	La soluzione del sistema è ....

Completa le seguenti tabelle.

4

Passi del procedimento	**Risolvere, mediante il teorema di Cramer, il sistema:** $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$
Determina il determinante del sistema.	$D = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-5) = 3 + 10 = 13$
Determina il determinante relativo a x.	$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - 4 \cdot (-5) = \ldots\ldots$
Determina il determinante relativo a y.	$D_y = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots$
Calcola la soluzione del sistema.	$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ e $y = \frac{D_y}{D} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

5

Sistema	**Rapporto fra i coefficienti di *x***	**Rapporto fra i coefficienti di *y***	**Rapporto fra i termini noti**	**Classificazione del sistema**
$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ 6x - 9y = 2 \end{cases}$	$\frac{a}{a'} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{b}{b'} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$	$\frac{c}{c'} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$	Il sistema è ....
$\begin{cases} 2x - 8y = -1 \\ 4x - 12y = 3 \end{cases}$	$\frac{a}{a'} = \ldots\ldots$	$\frac{b}{b'} = \ldots\ldots$	$\frac{c}{c'} = \ldots\ldots$	Il sistema è ....
$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ -8x + 12y = 4 \end{cases}$	$\frac{a}{a'} = \ldots\ldots$	$\frac{b}{b'} = \ldots\ldots$	$\frac{c}{c'} = \ldots\ldots$	Il sistema è ....
$\begin{cases} 30x - 25y = -7 \\ 6x - 5y = 14 \end{cases}$	$\frac{a}{a'} = \ldots\ldots$	$\frac{b}{b'} = \ldots\ldots$	$\frac{c}{c'} = \ldots\ldots$	Il sistema è ....

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
in un sistema con tre incognite, applicando il metodo di sostituzione, risolvere due equazioni rispetto a due incognite diverse: ciò non porta alla risoluzione del sistema, poiché non si elimina un'incognita	$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x=5-y-z \\ z=2-x+y \\ 5-y-z+y-(2-x+y)=1 \end{cases}$ **Errato!**	$\begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y+z=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} x=5-y-z \\ 5-y-z-y+z=2 \\ 5-y-z+y-z=1 \end{cases}$ **Corretto**
applicare in maniera errata il criterio del rapporto in sistemi, ridotti a forma normale, in cui i termini noti sono entrambi nulli	$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-5y=0 \end{cases}$ $\dfrac{c}{c'}=\dfrac{0}{0} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ sistema indeterminato **Errato!**	$\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-5y=0 \end{cases}$ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{1}{3} \neq \dfrac{b}{b'}=-\dfrac{2}{5} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ sistema determinato **Corretto**

Risolvi i seguenti sistemi con il metodo di sostituzione.

1 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x-2y=-6 \\ x+3y=3 \end{cases}$ $\quad \left[(2,1);\ \left(-\dfrac{12}{11}, \dfrac{15}{11}\right)\right]$

2 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=7 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x-4y=-1 \\ \dfrac{1}{2}x-y=1 \end{cases}$ $\quad \left[(5,-2);\ \left(-5, -\dfrac{7}{2}\right)\right]$

3 $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{1-y}{3} \\ x+2y=-1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{3}y=2 \\ x+y=-1 \end{cases}$ $\quad [(3,-2);\ (2,-3)]$

Risolvi i seguenti sistemi applicando il metodo di addizione e sottrazione.

4 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-2y=1 \\ x+2y=7 \end{cases}$ $\quad \left[(2,1);\ \left(4, \dfrac{3}{2}\right)\right]$

5 $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 2x+3y=-3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 3x-2y=1 \\ 4x-5y=-1 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\dfrac{3}{8}, -\dfrac{5}{4}\right);\ (1,1)\right]$

6 $\begin{cases} x-2y=5 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x-2y=4 \\ 2x+3y=-1 \end{cases}$ $\quad \left[\left(-4, -\dfrac{9}{2}\right);\ \left(\dfrac{10}{7}, -\dfrac{9}{7}\right)\right]$

Risolvi i seguenti sistemi, mediante il teorema di Cramer.

7 $\begin{cases} 3x+y=-1 \\ x-2y=5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y=-4 \\ 2x+5y=-2 \end{cases}$ $\quad \left[\left(\dfrac{3}{7}, -\dfrac{16}{7}\right);\ (-6,2)\right]$

8 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}x-y=5 \\ 3x-\dfrac{5}{2}y=-5 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x+y-1=0 \\ 3x+2y+4=0 \end{cases}$ $\quad [(-10,-10);\ (-6,7)]$

Risolvi e discuti i seguenti sistemi.

9 $\begin{cases} ax - y = 1 \\ (a-1)x - 4y = -1 \end{cases}$ $\left[\text{Se } a \neq -\frac{1}{3}\text{: sistema determinato con soluzione } \left(\frac{5}{3a+1}, \frac{2a-1}{3a+1}\right);\right.$ $\left.\text{se } a = -\frac{1}{3}\text{: sistema impossibile}\right]$

10 $\begin{cases} ax - 2y = 4 \\ (3-a)x - y = 2 \end{cases}$ [Se $a \neq 2$: sistema determinato con soluzione $(0, -2)$; se $a = 2$: sistema indeterminato]

11 $\begin{cases} ax - y = 2 \\ 2x - (a+1)y = 4 \end{cases}$ $\left[\text{Se } a \neq -2 \text{ e } a \neq 1\text{: sistema determinato con soluzione } \left(\frac{2}{a+2}, -\frac{4}{a+2}\right);\right.$ $\left.\text{se } a = -2\text{: sistema impossibile; se } a = 1\text{: sistema indeterminato}\right]$

Risolvi i seguenti sistemi di tre equazioni in tre incognite.

12 $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x + y = 8 \\ y + z = -4 \end{cases}$ $[(2, 6, -10)]$

13 $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y = -1 \\ z = 2(x+y) \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{3}{10}, \frac{7}{10}, \frac{4}{5}\right)\right]$

14 $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + 3y + z = 3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, \frac{5}{9}\right)\right]$

15 $\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x - 2y = 8 \\ y + z = -4 \end{cases}$ $[(2, -3, -1)]$

Risolvi con il metodo che ritieni più opportuno.

16 $\begin{cases} 3x - 4y = 2 \\ x = 4y + 5 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{8}\right)\right]$

17 $\begin{cases} y = x - 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$ [Impossibile]

18 $\begin{cases} x - 3y = -2 \\ 7y - 3x = 4 \end{cases}$ $[(1, 1)]$

19 $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases}$ $\left[\left(4, -\frac{1}{2}\right)\right]$

20 $\begin{cases} x - 7y = 6 \\ 4x + 14y = 3 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

21 $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(\frac{4}{13}, \frac{20}{13}\right)\right]$

22 $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{7}{5}, \frac{9}{5}\right)\right]$

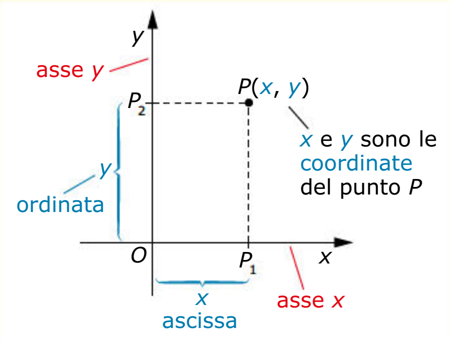
23 $\begin{cases} x + y = -10 \\ x - y = -9 \end{cases}$ $\left[\left(-\frac{19}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right]$

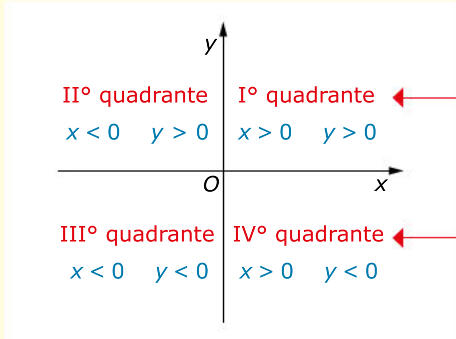
24 $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 1 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$ $[(-2, -2)]$

Piano cartesiano e funzione lineare

Sintesi visuale

Piano cartesiano





i quadranti sono i quattro angoli in cui il piano resta diviso dagli assi esclusi i punti degli assi stessi

Distanza tra due punti

Formula per calcolare la distanza fra due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$

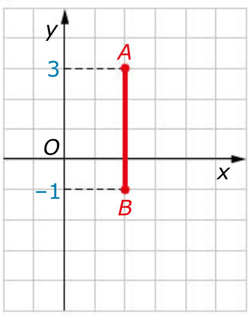
se $x_A = x_B$

$$\overline{AB} = |y_B - y_A|$$

Il valore assoluto è essenziale!

ESEMPIO

$A(2, 3)$ e $B(2, -1)$



$$\overline{AB} = |y_B - y_A| = |-1-3| = |-4| = 4$$

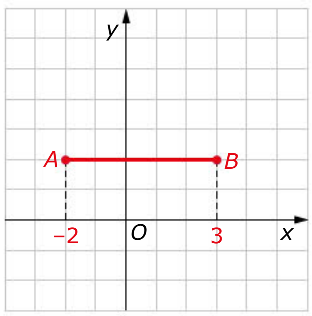
se $y_A = y_B$

$$\overline{AB} = |x_B - x_A|$$

Il valore assoluto è essenziale!

ESEMPIO

$A(-2, 2)$ e $B(3, 2)$



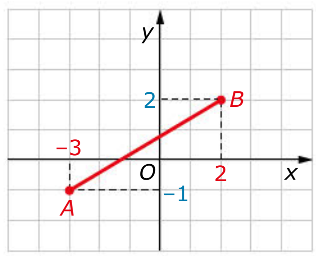
$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |3-(-2)| = |5| = 5$$

se $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

ESEMPIO

$A(-3, -1)$ e $B(2, 2)$



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

Punto medio di un segmento

Il **punto medio** di un segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

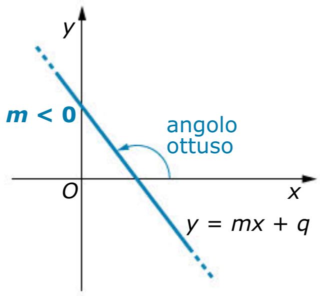
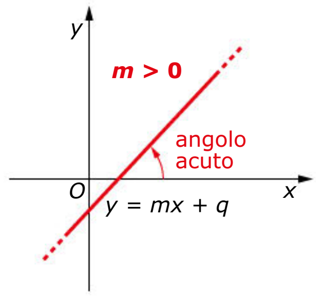
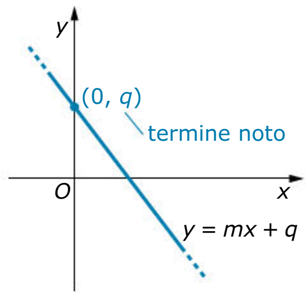
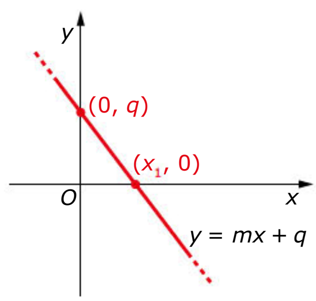
ESEMPIO

Il punto medio del segmento di estremi $A(-2, 2)$ e $B(3, 4)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Funzione lineare

Il grafico della funzione lineare di equazione $y = mx + q$ è una retta.

Legami tra l'equazione e il suo grafico	Grafico	ESEMPI
Coefficiente angolare Il coefficiente m si chiama *coefficiente angolare*. La retta di equazione $y = mx + q$: • se $m < 0$, forma con l'asse x un angolo ottuso; • se $m > 0$, forma con l'asse x un angolo acuto.		• La retta di equazione $y = -x + 2$ ha coefficiente angolare $m = -1$; essendo $m < 0$, la retta forma con l'asse x un angolo ottuso.
ATTENZIONE Per «angolo che la retta forma con l'asse x», si intende l'angolo, appartenente al semipiano in cui $y \geq 0$, che la retta forma con la direzione positiva dell'asse x.		• La retta di equazione $y = 3x + 1$ ha coefficiente angolare $m = 3$; essendo $m > 0$, la retta forma con l'asse x un angolo acuto.
Termine noto Il coefficiente q viene detto *termine noto* (oppure *ordinata all'origine*) e indica l'ordinata del punto d'intersezione del grafico di $y = mx + q$ con l'asse y.		• La retta di equazione $y = -x$ ha termine noto $q = 0$. • La retta di equazione $y = -x + 2$ ha termine noto $q = 2$.
Punti d'intersezione con gli assi cartesiani • Per determinare l'ascissa del punto d'intersezione con l'asse x della retta grafico di $y = mx + q$, occorre porre $y = 0$ e risolvere l'equazione $mx + q = 0$. • Il grafico di $y = mx + q$ interseca l'asse y in $(0, q)$.	 $mx + q = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{q}{m}$ se $m \neq 0$	• La retta di equazione $y = -3x + 2$: – interseca l'asse x nel punto la cui ascissa è la soluzione dell'equazione: $-3x + 2 = 0$ Poiché la soluzione di tale equazione è: $x = \frac{2}{3}$ la retta interseca l'asse x nel punto di coordinate $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$; – ha termine noto uguale a 2, quindi interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 2)$.

Esercizi da svolgere

Dati i punti A e B, determina il punto medio di AB e la misura del segmento AB.

1 $A(-3, 4)$ $B(4, 4)$ $\left[\left(\frac{1}{2}, 4\right); 7\right]$

2 $A(1, -2)$ $B(1, 3)$ $\left[\left(1, \frac{1}{2}\right); 5\right]$

3 $A(-2, 1)$ $B(3, 1)$ $\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right); 5\right]$

4 $A(-1, 3)$ $B(3, 4)$ $\left[\left(1, \frac{7}{2}\right); \sqrt{17}\right]$

5 $A(-1, -3)$ $B(-2, 1)$ $\left[\left(-\frac{3}{2}, -1\right); \sqrt{17}\right]$

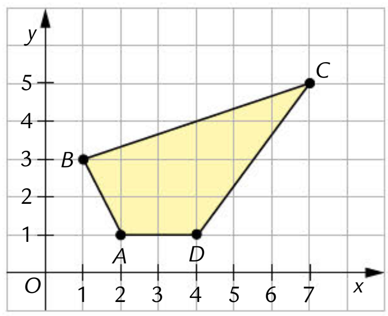
---

6 Calcola il perimetro e l'area del rettangolo di vertici:
$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ [Perimetro $= 10$; area $= 6$]

7 Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$, di vertici $A(-3, 0)$, $B(5, 0)$, $C(2, 4)$, $D(0, 4)$.
[Perimetro $= 20$; area $= 20$]

8 Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$, di vertici $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 3)$.
[Perimetro $= 14$; area $= 9$]

9 Determina il perimetro e l'area del quadrilatero in figura.

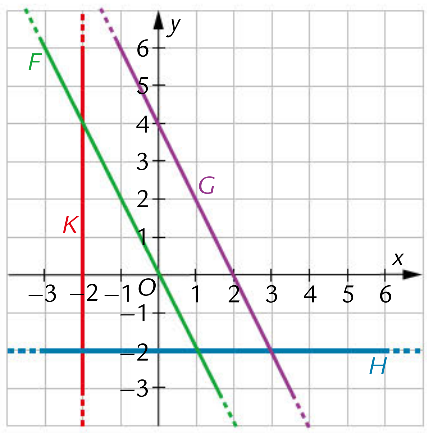


[Perimetro $= 7 + \sqrt{5} + 2\sqrt{10}$; area $= 11$]

Invalsi

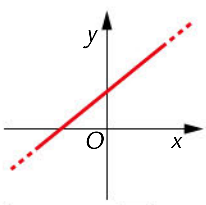
10 Sul piano cartesiano in figura sono rappresentate le rette F, G, H, K.
Associa a ciascuna delle equazioni in tabella la retta corrispondente.
Metti una crocetta per ogni riga.

Equazione	Retta F	Retta G	Retta H	Retta K
a. $y = -2x + 4$	☐	☐	☐	☐
b. $y = -2x$	☐	☐	☐	☐
c. $y = -2$	☐	☐	☐	☐

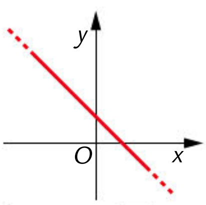


(Prova Invalsi 2014)

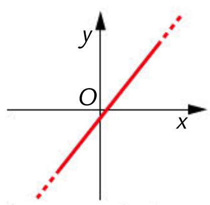
11 Ciascuna delle rette disegnate nelle figure seguenti è il grafico di una funzione lineare, di equazione $y = mx + q$. Per ciascun grafico, poni una crocetta sulle caselle che esprimono i segni di m e di q.



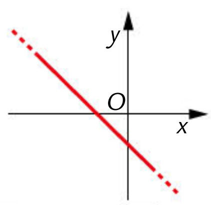
☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ $q > 0$ ☐ $q < 0$



☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ $q > 0$ ☐ $q < 0$



☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ $q > 0$ ☐ $q < 0$



☐ $m > 0$ ☐ $m < 0$
☐ $q > 0$ ☐ $q < 0$

Traccia il grafico delle rette aventi le seguenti equazioni, dopo averne determinato gli eventuali punti d'intersezione con gli assi cartesiani (nelle risposte sono riportate solo le coordinate dei punti d'intersezione con gli assi).

12 $y = -x - 1$ [(0, −1); (−1, 0)]

13 $y = 2x + 2$ [(0, 2); (−1, 0)]

14 $y = x - 2$ [(0, −2); (2, 0)]

15 $y = -2x$ [(0, 0)]

16 $y = \frac{2}{3}x - 2$ [(3, 0); (0, −2)]

17 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ [(2, 0); (0, 1)]

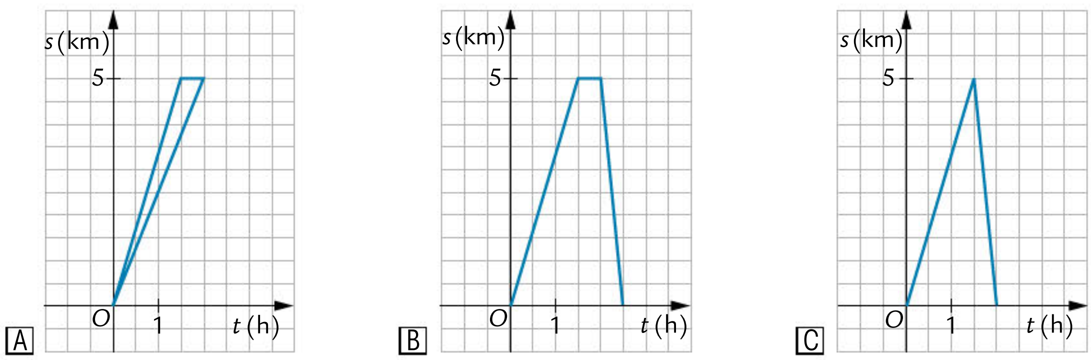
18 $y = \frac{1}{3}x - 1$ [(0, −1); (3, 0)]

19 $3x + 6 = 0$ [(−2, 0)]

Problemi e modelli

20 Matteo deve recarsi in autobus in un paesino di montagna distante 5 km per fare una consegna ma perde l'autobus e, per non aspettare il successivo, va a piedi impiegando un'ora e mezza. Arrivato a destinazione ed eseguita l'incombenza, aspetta mezz'ora e prende l'autobus per il ritorno. Quale dei seguenti grafici rappresenta lo spazio percorso in funzione del tempo?

Motiva esaurientemente la scelta della risposta.



21 Una casa editrice vuole stampare una nuova collana di libri. Per l'impaginazione e la stampa deve decidere fra le seguenti due alternative:

- far eseguire il lavoro a terzi al costo di 3 euro per ogni copia;
- eseguire il lavoro in proprio con i seguenti costi:
  - 4000 euro per spese fisse;
  - 2 euro per ogni copia.

a. Indicando con x il numero di copie da stampare, scrivi una legge matematica che rappresenti il costo di impaginazione e stampa in funzione del numero di copie, per entrambe le alternative.
b. Rappresenta graficamente le due funzioni nel piano cartesiano. (Considera x una variabile reale, anche se dovrebbe assumere solo valori interi.)
c. Determina il costo per la stampa di 2000 copie nelle due ipotesi.
d. Determina quante copie bisogna stampare perché diventi conveniente eseguire il lavoro in proprio. [**c.** 6000 euro per la prima alternativa, 8000 euro per la seconda; **d.** più di 4000 copie]

22 Per il trasporto di merce si deve scegliere la minore tra le seguenti alternative di costo:

a. 1,50 euro per ogni quintale trasportato;
b. 1,20 euro per quintale e un diritto fisso di 30 euro.

Indicando con x la quantità di merce in quintali, rappresenta il costo di trasporto in funzione della quantità x trasportata, per entrambe le alternative. Determina quale quantità rende conveniente pagare il diritto fisso dell'alternativa **b**. [Trasporti superiori ai 100 q]

Rette nel piano cartesiano

Sintesi visuale

Equazione in forma implicita

$ax + by + c = 0$

con $a \neq 0$ o $b \neq 0$

se la retta non è parallela all'asse *y* la sua equazione si può porre in forma esplicita

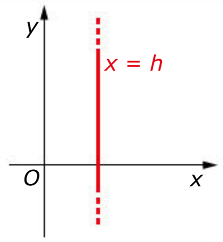
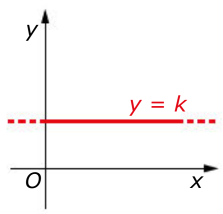
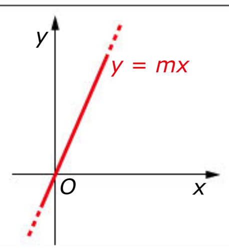
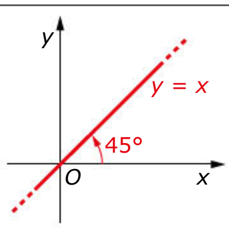
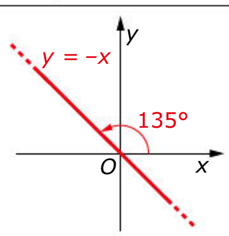
Equazione in forma esplicita

$y = mx + q$

ESEMPIO

$$\underbrace{2x - 3y + 1 = 0}_{\text{Forma implicita}} \quad \Rightarrow \quad -3y = -2x - 1 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}_{\text{Forma esplicita}}$$

Equazioni di rette particolari

Tipo di retta	Equazione	Grafico	Coefficiente angolare	Termine noto
Retta parallela all'asse *y*	$x = h$		Non è definito	Non è definito
Retta parallela all'asse *x*	$y = k$		È uguale a 0	È uguale a *k*
Retta passante per l'origine	$y = mx$		È uguale a *m*	È uguale a 0
Bisettrice del primo e del terzo quadrante	$y = x$		È uguale a 1	È uguale a 0
Bisettrice del secondo e del quarto quadrante	$y = -x$		È uguale a –1	È uguale a 0

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette

Due rette di equazioni
$y = mx + q$
$y = m'x + q'$

sono **parallele** se e solo se
$m = m'$

ESEMPIO
Sono parallele:
$\underbrace{y = 3x - 1 \qquad y = 3x + 2}_{\text{Stesso coefficiente angolare}}$

sono **perpendicolari** se e solo se
$m \cdot m' = -1$

ESEMPIO
Sono perpendicolari:
$y = 4x - 1 \qquad y = -0{,}25x + 5$

Antireciproci: $4 \cdot \underbrace{(-0{,}25)}_{-\frac{1}{4}} = -1$

Retta per un punto e di assegnato coefficiente angolare

Equazione della retta passante per $P(x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m. → $y - y_0 = m(x - x_0)$

ESEMPIO
La retta passante per $P(1, -2)$ e parallela alla retta di equazione $y = 3x$, ha coefficiente angolare $m = 3$, quindi l'equazione della retta è:

$$y - (\underbrace{-2}_{y_0}) = \underbrace{3}_{m}(x - \underbrace{1}_{x_0}) \qquad \text{da cui} \qquad y = 3x - 5$$

Retta per due punti

Procedimento per scrivere l'equazione della retta passante per i due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

se $x_A = x_B$

L'equazione è $x = x_A$ (la retta è parallela all'asse y).

ESEMPIO
I due punti $A(-2, 4)$ e $B(-2, 5)$ hanno la stessa ascissa: l'equazione della retta passante per A e B è dunque $x = -2$.

se $x_A \neq x_B$

L'equazione è $y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$ oppure, in modo equivalente, $y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$ dove il coefficiente angolare m_{AB} è dato da:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

ESEMPIO
I due punti $A(2, 6)$ e $B(-2, 4)$ hanno ascissa diversa.
Il coefficiente angolare della retta passante per A e per B è:

$$m_{AB} = \frac{4 - 6}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

L'equazione della retta AB si può scrivere, per esempio, come equazione della retta passante per A e di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$:

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 2) \qquad \text{da cui} \qquad y = \frac{1}{2}x + 5$$

Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle, seguendo i passi indicati e l'esempio svolto nella seconda colonna.

1

Passi del procedimento	**Stabilisci se le seguenti coppie di rette sono parallele o perpendicolari** $y=-2x$ $2x+y+1=0$	$y=-3x$ $x-3y+1=0$	$y=3x$ $6x+2y-1=0$
Determina il coefficiente angolare m della prima retta.	La retta di equazione $y=-2x$ ha coefficiente angolare $m=-2$.	La retta di equazione $y=-3x$ ha coefficiente angolare $m=$	La retta di equazione $y=3x$ ha coefficiente angolare $m=$ .....
Determina il coefficiente angolare m' della seconda retta.	La retta di equazione $2x+y+1=0$ ha equazione esplicita $y=-2x-1$, quindi il suo coefficiente angolare è $m'=-2$.	La retta di equazione $x-3y+1=0$ ha equazione esplicita $y=$ ...., quindi il suo coefficiente angolare è $m'=$	La retta di equazione $6x+2y-1=0$ ha equazione esplicita $y=$ ...., quindi il suo coefficiente angolare è $m'=$ ....
I due coefficienti angolari sono uguali?	Sì, quindi le due rette sono parallele.	....	....
I due coefficienti angolari hanno prodotto -1?	No, quindi le due rette non sono perpendicolari.	....	....

2

Passi del procedimento	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(-2, 1)$ e parallela alla retta r: $4x-2y=0$**	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(2, 4)$ e parallela alla retta r: $x+2y-1=0$**
Individua il coefficiente angolare m della retta richiesta.	L'equazione esplicita di r è $y=2x$. La retta richiesta deve avere lo stesso coefficiente angolare di r, quindi deve essere $m=2$.	L'equazione esplicita di r è $y=$ ...., quindi il coefficiente angolare della retta richiesta è $m=$ ....
Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P e di coefficiente angolare m.	$y-1=2(x-(-2))$	$y-$ ..... $=$ ..... $(x-$ .....$)$
Poni l'equazione della retta ottenuta in forma esplicita.	$y-1=2(x-(-2))$ ⇓ $y=2x+5$	$y-$ ..... $=$ ..... $(x-$ .....$)$ ⇓ $y=$ ....

3

Passi del procedimento	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(-2, 1)$ e perpendicolare alla retta r: $4x-2y=0$**	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(2, -1)$ e perpendicolare alla retta r: $x-3y=1$**
Individua il coefficiente angolare m della retta richiesta.	L'equazione esplicita di r è $y=2x$, quindi il suo coefficiente angolare è $m_r=2$. Il coefficiente angolare m della retta richiesta è l'opposto del reciproco di m_r, quindi: $m=-\frac{1}{2}$	L'equazione esplicita di r è $y=$ ...., quindi il suo coefficiente angolare è $m_r=$ ... Il coefficiente angolare m della retta richiesta è allora: $m=$ ....
Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P e di coefficiente angolare m.	$y-1=-\frac{1}{2}(x-(-2))$	$y-$ ..... $=$ ..... $(x-$ .....$)$
Poni l'equazione della retta ottenuta in forma esplicita.	$y=$	$y=$ ....

4

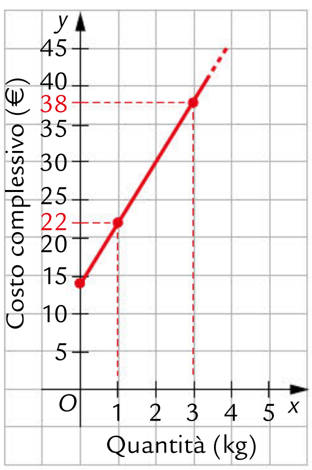
Passi del procedimento	Scrivere l'equazione della retta passante per $A(-1, 3)$ e $B(4, 1)$	Scrivere l'equazione della retta passante per $A(2, 4)$ e $B(-3, 2)$
Determina il coefficiente angolare m_{AB} della retta AB.	$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-3}{4-(-1)} = -\dfrac{2}{5}$	$m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\ldots - \ldots}{\ldots - \ldots} = \ldots$
Scrivi l'equazione della retta AB: essa è, per esempio, l'equazione della retta passante per A di coefficiente angolare m_{AB}.	$y - 3 = -\dfrac{2}{5}(x-(-1))$	$y - \ldots = \ldots\ (x - \ldots)$
Poni l'equazione della retta in forma esplicita.	L'equazione della retta in forma esplicita è	L'equazione della retta in forma esplicita è ....

5 Completa la seguente tabella.

Determina per quali valori di k la retta di equazione $(2k-3)x + 2y - k + 1 = 0$:	
a. passa per il punto $P(-2, 3)$	Sostituisci -2 al posto di x e 3 al posto di y nell'equazione della retta e risolvi l'equazione nell'incognita k che si ottiene: $(2k-3)(-2) + 2 \cdot 3 - k + 1 = 0 \Rightarrow k = \ldots$
b. è parallela all'asse x	Affinché la retta data sia parallela all'asse x deve avere equazione del tipo $y = h$, dunque deve annullarsi il coefficiente di x, cioè deve essere $2k - 3 = 0$, da cui $k = \ldots$
c. è parallela all'asse y	Affinché la retta data sia parallela all'asse y, dovrebbe avere equazione del tipo $x = h$, ma ciò è impossibile perché il coefficiente di y è 2 (non dipendendo da k, non può annullarsi).
d. è parallela alla retta di equazione $y = 2x$	Ricava il coefficiente angolare della retta data che è $m = \dfrac{3-2k}{2}$; affinché tale retta sia parallela a $y = 2x$ deve essere $m = 2$; devi dunque risolvere l'equazione $\dfrac{3-2k}{2} = 2$, da cui $k = \ldots$
e. è perpendicolare alla retta di equazione $y = 2x$	Ricava il coefficiente angolare della retta data che è $m = \dfrac{3-2k}{2}$; affinché tale retta sia perpendicolare a $y = 2x$ deve essere $m = -\dfrac{1}{2}$; devi dunque risolvere l'equazione $\dfrac{3-2k}{2} = -\dfrac{1}{2}$, da cui $k = \ldots$

6 **Problemi e modelli** Completa la risoluzione del seguente problema.

Il costo per la produzione di una merce è costituito da una parte fissa e da una parte variabile, dipendente dalla quantità di merce prodotta. La funzione che esprime il costo complessivo (comprensivo di costo fisso e costo variabile) per la produzione di una quantità x (in kg) di merce è rappresentata in figura. Determina quanto si spenderebbe per la produzione di 20 kg di merce, specificando a quanto ammonta il costo fisso.



Soluzione

- Scrivi anzitutto l'equazione della retta che passa per i due punti di coordinate (1, 22) e (3, 38); ottieni:

  $y = 8x + \ldots$ [*]

- Il costo per una produzione di 20 kg è il valore di y che si ottiene sostituendo $x = 20$ nell'equazione [*]. Il costo fisso è quello che corrisponde a una produzione nulla, dunque è rappresentato dal termine noto dell'equazione [*]: si ha quindi che il costo fisso è di ....

[174 euro; 14 euro]

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
confondere rette parallele all'asse x con rette parallele all'asse y e viceversa	**1.** $x=3$ rappresenta una retta parallela all'asse x **2.** $y=-2$ rappresenta una retta parallela all'asse y **Errato!**	**1.** $x=3$ rappresenta una retta parallela all'asse y **2.** $y=-2$ rappresenta una retta parallela all'asse x **Corretto**
sbagliare l'ordine delle coordinate quando si calcola il coefficiente angolare di una retta passante per due punti	Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(3,-2)$ e $B(1,-1)$: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_A-x_B}=\frac{-1+2}{3-1}=\frac{1}{2}$ **Errato!**	Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(3,-2)$ e $B(1,-1)$: $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-1+2}{1-3}=-\frac{1}{2}$ **Corretto**

Scrivi, se possibile, le equazioni delle seguenti rette in forma *esplicita* e identificane il coefficiente angolare e il termine noto (nelle risposte è riportata solo l'equazione esplicita della retta).

1 $2x-y-1=0$ $[y=2x-1]$

2 $2x+y+5=0$ $[y=-2x-5]$

3 $2x+3=0$ [Retta parallela all'asse y: non si può porre in forma esplicita]

4 $3x-6y+2=0$ $\left[y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right]$

5 $y+4=0$ $[y=-4]$

6 $4x+2y+3=0$ $\left[y=-2x-\frac{3}{2}\right]$

Scrivi le equazioni delle seguenti rette in forma *implicita*.

7 $y=-2x+3$ $[y+2x-3=0]$

8 $x+y=4$ $[x+y-4=0]$

9 $y=\frac{2}{3}x-5$ $[3y-2x+15=0]$

Scrivi l'equazione della retta passante per P e parallela a r.

10 $P(-1,3)$ r: asse x $[y=3]$

11 $P(-1,3)$ r: asse y $[x=-1]$

12 $P(-2,0)$ $r: y=-3x$ $[y=-3x-6]$

13 $P(-2,-1)$ $r: 4x-2y-1=0$ $[y=2x+3]$

14 $P\left(3,\frac{1}{2}\right)$ $r: y=x+2$ $\left[y=x-\frac{5}{2}\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per P e perpendicolare a r.

15 $P(0,3)$ $r: y=-2x$ $\left[y=\frac{1}{2}x+3\right]$

16 $P(1,-2)$ $r: x+3y-1=0$ $[y=3x-5]$

17 $P\left(\frac{1}{2},0\right)$ $r: x+y=10$ $\left[y=x-\frac{1}{2}\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per i due punti A e B.

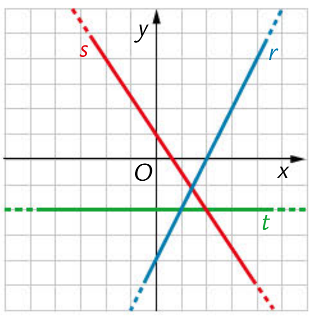
18 $A(0,2)$ $B(-1,-1)$ $[y=3x+2]$

19 $A(-1,0)$ $B(0,3)$ $[y=3x+3]$

20 $A(-1,-1)$ $B(3,4)$ $\left[y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right]$

21 $A(-4,3)$ $B(2,5)$ $\left[y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}\right]$

22 Scrivi le equazioni delle rette rappresentate nella seguente figura.



$\left[r: y=2x-4;\ s: y=-\frac{3}{2}x+1;\ t: y=-2\right]$

23 Un parallelogramma $ABCD$ ha tre vertici in $A(0,1)$, $B(2,0)$ e $C(4,3)$. Determina le equazioni delle rette a cui appartengono i lati e le diagonali di tale parallelogramma.

$\left[AB: y=-\frac{1}{2}x+1;\ BC: y=\frac{3}{2}x-3;\ CD: y=-\frac{1}{2}x+5;\ DA: y=\frac{3}{2}x+1;\right.$ diagonali: $\left.AC: y=\frac{1}{2}x+1;\ BD: x=2\right]$

Lezione 7 A

Equazioni di secondo grado

Sintesi visuale

Classificazione e schemi risolutivi

Il numero $\Delta = b^2 - 4ac$ è detto **discriminante** dell'equazione.

Equazione di secondo grado in forma normale

$ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

Incompleta: se almeno uno dei coefficienti b o c è nullo.

Completa: se nessuno dei coefficienti è nullo.

Equazioni incomplete

Classificazione e schemi risolutivi

Equazione pura

Equazione del tipo:
$ax^2 + c = 0$, con $a \neq 0 \wedge c \neq 0$

ESEMPI

1. $x^2 + 10 = 0 \Rightarrow x^2 = -10$
   L'equazione è impossibile perché il secondo membro è negativo.
2. $2x^2 - 200 = 0 \Rightarrow x^2 = 100$
   $\Rightarrow x = \pm 10$

Equazione spuria

Equazione del tipo:
$ax^2 + bx = 0$, con $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

ESEMPIO

$3x^2 - 4x = 0$

$x(3x - 4) = 0$

$x = 0 \vee 3x - 4 = 0$

$x = 0 \vee x = \dfrac{4}{3}$

Equazione monomia

Equazione del tipo:
$ax^2 = 0$, con $a \neq 0$

Ha sempre come soluzione doppia $x = 0$.

ESEMPI

Le equazioni $5x^2 = 0$ e $-3x^2 = 0$ hanno entrambe come soluzione $x = 0$.

Equazione completa

$ax^2 + bx + c \neq 0$ $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

Formula risolutiva

Soluzioni: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta > 0$

L'equazione **ha due soluzioni reali e distinte**.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

ESEMPIO

$2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) =$
$= 25 + 24 = 49 > 0$

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$

$x_1 = -\dfrac{12}{4} = -3$, $x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\Delta = 0$

L'equazione **ha due soluzioni reali e coincidenti**.

$x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$

ESEMPIO

$4x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 =$
$= 16 - 16 = 0$

$x_1 = x_2 = -\dfrac{-4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$\Delta < 0$

L'equazione **non** ha soluzioni reali.

ESEMPIO

$2x^2 + 5x + 4 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 =$
$= 25 - 32 = -7 < 0$

L'equazione **non** ha soluzioni reali.

Relazioni tra radici e coefficienti

Relazioni tra radici e coefficienti

Relazioni che consentono di determinare la somma, il prodotto e il segno delle eventuali soluzioni reali x_1, x_2 dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ senza risolvere l'equazione stessa.

Somma (se $\Delta \geq 0$)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

Prodotto (se $\Delta \geq 0$)

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

ESEMPIO

Data l'equazione:

$$\underbrace{4x^2 - 3x - 2}_{\text{verifica che } \Delta \geq 0} = 0$$

risulta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$x_1 x_2 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Segno (regola di Cartesio)

Data un'equazione di secondo grado a coefficienti diversi da zero, il susseguirsi di due segni uguali nei coefficienti si chiama **permanenza**, mentre il susseguirsi di due segni diversi si chiama **variazione**. A ogni permanenza corrisponde una radice *negativa* dell'equazione, mentre a ogni variazione corrisponde una radice *positiva* (a patto che sia $\Delta \geq 0$).

ESEMPIO

L'equazione $x^2 - 3x - 2 = 0$ ha soluzioni reali perché $\Delta = 17 > 0$. Osserviamo la sequenza dei segni dei coefficienti:

$x^2 - 3x - 2 = 0$

$\boxed{+ \quad - \quad -}$ $\Rightarrow$ l'equazione ha una radice positiva e una radice negativa

variazione permanenza

Riducibilità del trinomio di secondo grado

Trinomio di secondo grado

$ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0$

Riducibile

Se risulta $\Delta \geq 0$, allora

$$ax^2 + bx + c = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{x_1,\ x_2 \text{ sono le radici dell'equazione } ax^2 + bx + c = 0}$$

Irriducibile

Se risulta $\Delta < 0$.

ESEMPIO

- $2x^2 + x - 1 = 2(x - (-1))\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2(x + 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (x + 1)(2x - 1)$

  a x_1 x_2 soluzioni dell'equazione $2x^2 + x - 1 = 0$

- $2x^2 + x + 1$ è irriducibile perché risulta $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -7 < 0$

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella.

Equazione	È in forma normale?	Forma normale (se non lo è già)	Coefficienti	Discriminante	Quante soluzioni reali ammette?
$2x^2 - 3x + 1 = 0$	☒ SÌ ☐ NO	....	$a = 2 \quad b = -3 \quad c = 1$	$\Delta = 9 - 8 = 1$	2
$x^2 - 3x = -3$	☐ SÌ ☐ NO	....	$a = \ldots \quad b = \ldots \quad c = \ldots$	$\Delta = \ldots\ldots$	....
$x^2 + 2x - \dfrac{1}{2} = 0$	☐ SÌ ☐ NO	....	$a = \ldots \quad b = \ldots \quad c = \ldots$	$\Delta = \ldots\ldots$	....

2 Completa la risoluzione della seguente equazione.

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

In questo caso: $a = 3;\quad b = -7;\quad c = 2.$

Applicando la formula risolutiva si ha:

$$x = \frac{-(\ldots) \pm \sqrt{(\ldots)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{\ldots \pm \sqrt{\ldots - 24}}{6} = \frac{\ldots \pm \sqrt{25}}{6} = \frac{\ldots \pm 5}{6}$$

Le radici dell'equazione sono:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7 - \ldots}{6} = \dfrac{\ldots}{6} = \ldots \\ x_2 = \dfrac{7 + \ldots}{6} = \dfrac{\ldots}{6} = \ldots \end{cases}$$

3 Completa la seguente tabella in cui vieni guidato a risolvere alcune equazioni di secondo grado.

Equazione	$x^2 - 6ax + 9a^2 - 1 = 0$	$x^2 - kx + 3k - 9 = 0$	$x^2 + kx - x - 2k - 2k^2$
Coefficienti	$a = 1,\ b = -6a,\ c = 9a^2 - 1$	$a = \ldots,\ b = \ldots,\ c = \ldots\ldots$	$a = \ldots,\ b = k - \ldots,\ c = \ldots\ldots$ Attenzione al coefficiente di x!
Discriminante	$\Delta = (-6a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9a^2 - 1) =$ $= \ldots\ldots = (\ldots)^2$	$\Delta = (\ldots)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3k - \ldots) =$ $= \ldots\ldots = (k - \ldots)^2$	$\Delta = (\ldots\ldots)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2k - \ldots) =$ $= \ldots\ldots = (\ldots + \ldots)^2$
Soluzioni	$x = \dfrac{-(-6a) \pm \sqrt{(\ldots\ldots)^2}}{2} =$ $= \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$	$x = \dfrac{-(\ldots) \pm \sqrt{(\ldots\ldots)^2}}{2} =$ $= \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$	$x = \dfrac{-(\ldots\ldots) \pm \sqrt{(\ldots\ldots)^2}}{2} =$ $= \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$

4 Completa la seguente tabella in cui vieni guidato a risolvere un'equazione di secondo grado frazionaria.

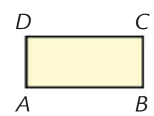
Passi del procedimento	**Risolvere l'equazione:** $x + \dfrac{2x - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{x - 1}$
Condizioni di esistenza	C.E. $x - 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \ldots\ldots$
«Libera» l'equazione dai denominatori e risolvi l'equazione a cui pervieni	$x + \dfrac{2x - 1}{x - 1} = \dfrac{1}{x - 1}$ m.c.m. $= (x - 1)$ $(x - 1)\left(x + \dfrac{2x - 1}{x - 1}\right) = (x - 1)\ \dfrac{1}{x - 1}$ $x(x - 1) + 2x - 1 = \ldots\ldots \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - \ldots\ldots = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \ldots\ldots \vee x = \ldots\ldots$
Verifica se le soluzioni trovate sono accettabili	La soluzione $x = \ldots\ldots$ va *scartata* perché .... , mentre l'altra soluzione è accettabile. In conclusione, l'unica soluzione dell'equazione data è ....

5 Completa la seguente tabella in cui vieni guidato a risolvere un esercizio relativo a un'equazione parametrica.

Considera l'equazione:	$kx^2 - 2x + 1 = 0$, **con** $k \neq 0$
Per quali valori di k l'equazione ammette due soluzioni *reali distinte*?	Affinché l'equazione abbia radici reali distinte deve essere $\Delta > 0$. Ciò si traduce nella disequazione: $(\ldots\ldots)^2 - 4 \cdot k \cdot 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad k < \ldots\ldots$
Per quali valori di k ammette due soluzioni *reali* aventi come *somma* 4?	Affinché sia $x_1 + x_2 = 4$, occorre che $-\dfrac{b}{a} = 4$. Nel nostro caso questa condizione si traduce nell'equazione: $-\dfrac{\ldots}{k} = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \dfrac{\ldots}{\ldots}$ Il valore di k trovato è accettabile se e solo se in corrispondenza di esso le soluzioni sono anche reali. Il valore di k trovato è accettabile? ....
Per quali valori di k ammette due soluzioni *reali distinte positive*?	Deve essere intanto $k < \ldots$ affinché le radici siano *reali distinte*. Per determinare la condizione che garantisca la *positività* delle radici, osserva i coefficienti dell'equazione: $k, \ -2, \ 1$. Affinché le soluzioni dell'equazione siano *entrambe positive*, devono esserci *due variazioni*: ciò si verifica per $k > \ldots$ In definitiva, affinché le radici siano *reali distinte* e *positive* deve essere $k < \ldots$ (per la realtà) e $k > \ldots$ (per la positività), ossia $\ldots < k < \ldots$

Problemi e modelli

6 Completa la seguente tabella in cui vieni guidato a risolvere un problema il cui modello algebrico è un'equazione di secondo grado.

Passi del procedimento	**In un rettangolo, la lunghezza di uno dei due lati supera di 1 cm quella dell'altro.** **Sapendo che l'area del rettangolo è** $\dfrac{15}{4}$ **cm²**, **determinarne il perimetro.**
Individua i dati e l'obiettivo.	$AB = 1 \text{ cm} + BC$ $\text{Area}(ABCD) = \dfrac{15}{4} \text{ cm}^2$ 
Costruisci il modello algebrico del problema.	Indica con x la misura, in centimetri, del lato minore del rettangolo; la misura dell'altro lato sarà allora .... Dal momento che x rappresenta la misura di un lato, dovrà essere $x > \ldots\ldots$ Affinché l'area del rettangolo sia $\dfrac{15}{4}$ cm², dovrà essere $x(x+1) = \ldots\ldots$
Risolvi l'equazione.	Risolvendo questa equazione si trovano le due soluzioni: $x_1 = -\dfrac{5}{2}, \quad x_2 = \ldots\ldots$
Stabilisci se le soluzioni trovate sono accettabili in relazione al problema e rispondi.	La soluzione negativa non ha senso in relazione al problema, in quanto deve essere $x > \ldots\ldots$. L'unica soluzione accettabile è perciò $x_2 = \ldots\ldots$; ne segue che il rettangolo che soddisfa le condizioni espresse dal problema ha il lato minore lungo 1,5 cm e il lato maggiore lungo .... cm. Pertanto il perimetro del rettangolo è (1,5 + 1,5 + ... + ...) cm, ossia 8 cm.

Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
nelle equazioni pure «trovare» soluzioni anche quando l'equazione non ne possiede	$2x^2+5=0 \Rightarrow x^2=-\frac{5}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ oppure $\Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{5}{2}}$ Errato!	$2x^2+5=0$ non ha soluzioni poiché l'espressione a primo membro assume soltanto valori positivi Corretto
sbagliare il segno nell'applicazione della formula risolutiva, quando il coefficiente a è negativo	$-2x^2+3x+5=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{4}$ Errato!	$-2x^2+3x+5=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-4}$ oppure $-2x^2+3x+5=0 \Rightarrow 2x^2-3x-5=0$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9+40}}{4}$ Corretto
«trovare» soluzioni anche quando il discriminante è negativo e l'equazione non ne possiede	$x^2+3x+5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-20}}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{11}}{2}$ oppure $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}$ Errato!	$x^2+3x+5=0$ $\Delta=9-20=-11<0$ l'equazione non ha soluzioni, poiché il suo discriminante è negativo Corretto
applicare la regola di Cartesio senza prima accertarsi che l'equazione possieda soluzioni	$x^2+3x+5=0$ i coefficienti presentano due permanenze, per cui l'equazione possiede due soluzioni negative Errato!	$x^2+3x+5=0$ $\Delta=9-20=-11<0$ l'equazione non ha soluzioni, poiché il suo discriminante è negativo, quindi non ha senso parlare di «segno» delle soluzioni Corretto
nelle equazioni parametriche, determinare valori del parametro affinché le soluzioni delle equazioni soddisfino determinate condizioni, senza accertarsi che l'equazione possieda soluzioni	Nell'equazione $kx^2-(k+1)x+2=0$, determinare k affinché le soluzioni siano reciproche. Bisogna imporre che il prodotto delle soluzioni sia uguale a 1: $\frac{c}{a}=1 \Rightarrow \frac{2}{k}=1$, con $k\neq 0$ Quindi per $k=2$ l'equazione ammette soluzioni reciproche. Errato!	Nell'equazione $kx^2-(k+1)x+2=0$, determinare k affinché le soluzioni siano reciproche. Bisogna imporre che il prodotto delle soluzioni sia uguale a 1: $\frac{c}{a}=1 \Rightarrow \frac{2}{k}=1$, con $k\neq 0$ Quindi $k=2$. Ma per $k=2$ l'equazione di partenza diventa: $2x^2-3x+2=0$ e ha il discriminante negativo. Quindi non esiste alcun valore di k per cui l'equazione ammetta soluzioni reciproche. Corretto
dimenticare il fattore numerico a nella scomposizione del trinomio di secondo grado	Scomporre in fattori il polinomio $3x^2+5x-2$. Le soluzioni dell'equazione $3x^2+5x-2=0$ sono: $x_{1,2}=\frac{-5\pm7}{6}=\begin{cases}-2\\ \frac{1}{3}\end{cases}$ Dunque: $3x^2+5x-2=(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ Errato!	Scomporre in fattori il polinomio $3x^2+5x-2$. Le soluzioni dell'equazione $3x^2+5x-2=0$ sono: $x_{1,2}=\frac{-5\pm7}{6}=\begin{cases}-2\\ \frac{1}{3}\end{cases}$ Dunque: $3x^2+5x-2=3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ Corretto

Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado pure o spurie.

1 $x^2-1=0$ $\quad x^2+4x=0$ $\quad x^2+2=0$ $\quad [\pm 1;\ 0,-4;\ \text{impossibile}]$

2 $x^2-2=0$ $\quad x^2-5x=0$ $\quad 3x^2-9x=0$ $\quad [\pm\sqrt{2};\ 0,5;\ 0,3]$

3 $2x^2+4=0$ $\quad x^2-x\sqrt{2}=0$ $\quad x^2-\sqrt[3]{4}=0$ $\quad [\text{Impossibile};\ 0,\sqrt{2};\ \pm\sqrt[3]{2}]$

Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado complete.

4 $x^2-x+1=0$ $\quad$ [Impossibile]

5 $2x^2+5x-7=0$ $\quad \left[-\frac{7}{2}, 1\right]$

6 $3x^2-2x-5=0$ $\quad \left[-1, \frac{5}{3}\right]$

7 $x^2-2x-1=0$ $\quad [1\pm\sqrt{2}]$

8 $x^2+x-6=0$ $\quad [-3, 2]$

9 $x^2+3x+4=0$ $\quad$ [Impossibile]

10 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+1=0$ $\quad [1, 2]$

11 $x^2-\sqrt{7}x+3=0$ $\quad$ [Impossibile]

12 $x^2-2\sqrt{2}x+1=0$ $\quad [\sqrt{2}\pm 1]$

13 $x^2-2\sqrt{5}x+4=0$ $\quad [\sqrt{5}\pm 1]$

14 $\frac{1}{2}(x-1)^2=(x-1)(x+1)+\frac{15}{8}$ $\quad \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

Risolvi in R le seguenti equazioni di secondo grado intere.

15 $4x^2-2x=0$ $\quad \left[0, \frac{1}{2}\right]$

16 $4x^2=(x+2)^2$ $\quad \left[-\frac{2}{3}, 2\right]$

17 $9x^2-1=0$ $\quad \left[\pm\frac{1}{3}\right]$

18 $-\frac{1}{2}x^2=3$ $\quad$ [Impossibile]

19 $3x^2-2x-1=0$ $\quad \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

20 $\frac{1}{2}x^2-x-1=0$ $\quad [1\pm\sqrt{3}]$

21 $\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x=\frac{3}{2}x^2$ $\quad \left[0, \frac{1}{2}\right]$

22 $x^2-x+1=0$ $\quad$ [Impossibile]

23 $x^2-\sqrt{5}x+1=0$ $\quad \left[\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\right]$

24 $9x^2+12x+4=0$ $\quad \left[-\frac{2}{3}\right]$

25 $\frac{1}{2}(x-1)^2=2x$ $\quad [3\pm 2\sqrt{2}]$

26 $(2x+1)^2=-3$ $\quad$ [Impossibile]

27 $x(x+10)=-21$ $\quad [-7, -3]$

28 $\frac{1}{2}x^2-12=0$ $\quad [\pm 2\sqrt{6}]$

29 $2x+\frac{1}{6}(x-2)^2=-\frac{4}{3}$ $\quad [-6, -2]$

30 $(x-1)^2=100$ $\quad [-9, 11]$

Dopo aver verificato che le seguenti equazioni hanno soluzioni reali, determina, senza risolverle, il segno, la loro somma e il loro prodotto.

31 $2x^2-6x+3=0$ $\quad \left[\text{Due soluzioni positive; } s=3, p=\frac{3}{2}\right]$

32 $x^2-2\sqrt{2}x-3=0$ $\quad [\text{Una soluzione positiva e una negativa; } s=2\sqrt{2}, p=-3]$

33 $10x^2+25x+6=0$ $\quad \left[\text{Due soluzioni negative; } s=-\frac{5}{2}, p=\frac{3}{5}\right]$

34 $\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}=0$ $\quad \left[\text{Una soluzione positiva e una negativa; } s=3, p=-\frac{2}{3}\right]$

35 Senza risolvere le equazioni, completa la seguente tabella.

Equazione	x_1+x_2	x_1x_2	x_1	x_2
$x^2+3x-18=0$	....	....	-6	....
$3x^2-14x+8=0$	....	....	....	4
$x^2-\frac{28}{5}x+3=0$	....	....	....	5

36 Una delle soluzioni dell'equazione $ax^2 + 3x + c = 0$ è 3 e la somma delle soluzioni è -2. Determina a e c. $\left[a = \frac{3}{2}, c = -\frac{45}{2}\right]$

37 Una delle soluzioni dell'equazione $2x^2 + bx + c = 0$ è -1 e il prodotto delle soluzioni è 4. Determina b e c. $[b = 10, c = 8]$

Stabilisci se i seguenti trinomi sono riducibili in R e, in caso affermativo, scomponili.

38 $x^2 + 3x + 4$ [Irriducibile]

39 $3x^2 - 2x - 1$ $[(x-1)(3x+1)]$

40 $x^2 - 4x - 6$ $[(x - 2 - \sqrt{10})(x - 2 + \sqrt{10})]$

41 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ $\left[\frac{1}{2}(x-1)(x-2)\right]$

42 $6x^2 - x - 2$ $\left[6\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$

43 $2x^2 + 4x + 3$ [Irriducibile]

44 $x^2 - 4x - 7$ $[(x + \sqrt{11} - 2)(x - \sqrt{11} - 2)]$

Risolvi le seguenti equazioni di secondo grado frazionarie.

45 $1 + \frac{2}{x^2 - 4x} = \frac{1}{2(x-4)}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

46 $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} = 1$ $\left[\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

47 $\frac{5}{x^2 + 2x - 3} + \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{6}{x+1}$ $\left[-\frac{8}{3}, 2\right]$

48 $2 + \frac{1}{x} + \frac{3x+4}{x-2} = -\frac{2}{x^2 - 2x}$ $\left[-\frac{1}{5}\right]$

49 $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x^2 + 2x}$ $[-3 \pm \sqrt{17}]$

50 $\frac{1}{x^2 - 3x} + \frac{1}{9 - x^2} = \frac{1}{3x + 9}$ $\left[\frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}\right]$

51 $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{x}$ $[1 \pm \sqrt{7}]$

52 $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} + \frac{2}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{2}{2 - x}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

53 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2} = 1$ $[-1, 2]$

54 $\frac{2x^2}{2x - 1} = \frac{1}{4x - 2}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

55 $\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{x}$ $[3 \pm \sqrt{3}]$

56 $\frac{x^3}{x^3 - 1} - \frac{1}{2x - 2} = 1$ $\left[\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right]$

---

57 Risolvi le seguenti formule rispetto alla variabile indicata a fianco, supponendo che le variabili possano assumere solo valori positivi.

1. $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ variabile c

2. $d = \frac{a+c}{b+c^2}$ variabile c

3. $A = \pi r^2 + \pi rs$ variabile r

4. $x = \frac{1+y}{1+y^2}$ variabile y

58 Data l'equazione $x^2 - 2x + k + 3 = 0$, determina per quali valori di k:
a. ha soluzioni reali;
b. ha due soluzioni reali, di cui una l'opposto del reciproco dell'altra;
c. ha due soluzioni reali positive e distinte. [**a.** $k \leq -2$; **b.** $k = -4$; **c.** $-3 < k < -2$]

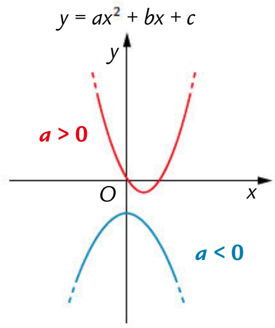
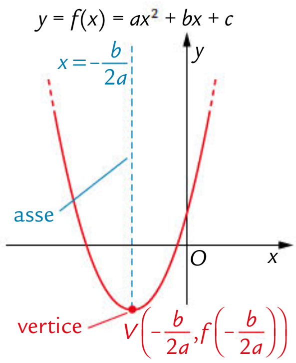
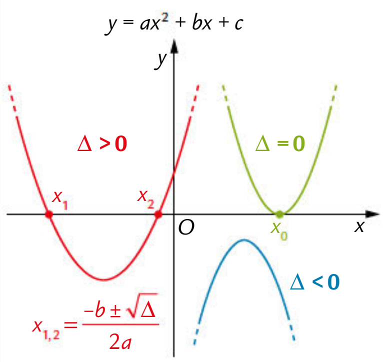
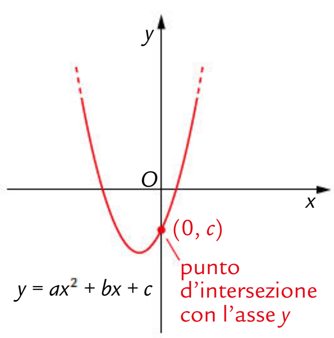
59 Data l'equazione $kx^2 - 2x + 1 = 0$, con $k \neq 0$, determina per quali valori di k:
a. non ha soluzioni reali;
b. le soluzioni sono reali e la loro somma è 1;
c. ha una soluzione positiva e una negativa. [**a.** $k > 1$; **b.** nessun valore di k; **c.** $k < 0$]

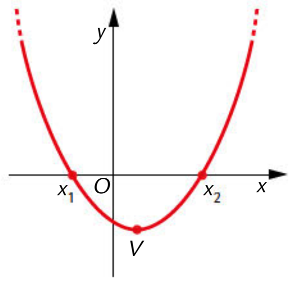
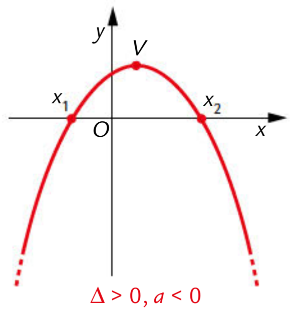
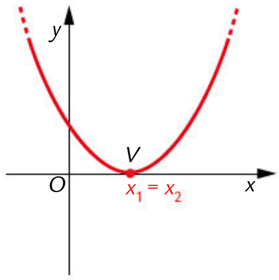
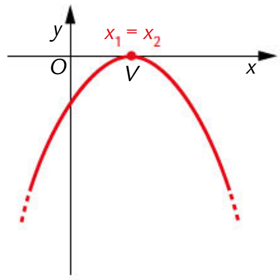
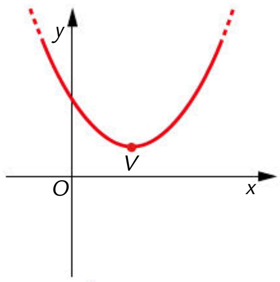
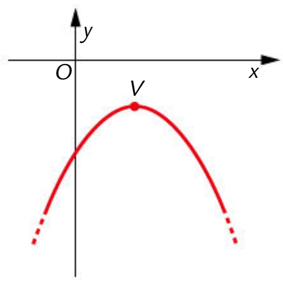
60 Verifica che l'equazione $x^2 - kx - 1 = 0$ ha sempre soluzioni reali; poi determina per quali valori di k:
a. la somma delle soluzioni è 10;
b. la somma dei quadrati delle soluzioni è 10. [**a.** $k = 10$; **b.** $k = \pm 2\sqrt{2}$]

61 Considera l'equazione $x^2 - 2kx - 4 = 0$. Giustifica perché tale equazione ammette sempre soluzioni reali, per ogni valore di k. Determina poi k in modo che:
a. le due soluzioni abbiano come somma 3;
b. le due soluzioni siano opposte;
c. le due soluzioni abbiano come prodotto 3. [**a.** $k = \frac{3}{2}$; **b.** $k = 0$; **c.** impossibile]

Sintesi visuale

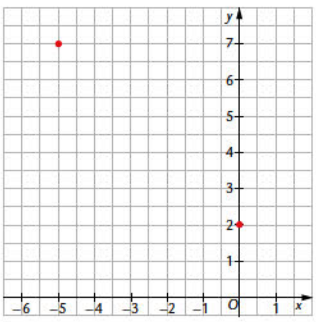
L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una **parabola**.

Caratteristiche del grafico	Disegno	ESEMPI
La **concavità**: • se $a > 0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto; • se $a < 0$, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.		• La parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ ha la concavità rivolta verso l'alto, perché $a = 1 > 0$. • La parabola di equazione $y = -2x^2 + 1$ ha la concavità rivolta verso il basso, perché $a = -2 < 0$.
Il **vertice** e l'**asse**: • il vertice è il punto di coordinate: $V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ • l'asse è la retta verticale passante per il vertice; la sua equazione è: $x = -\frac{b}{2a}$		La parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ ha vertice nel punto V di ascissa: $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ L'ordinata del vertice si calcola sostituendo 1 al posto di x nell'equazione della parabola: $y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$ Il vertice è quindi $V(1, -4)$.
I **punti d'intersezione** con l'asse $\boldsymbol{x}$: • se $\Delta < 0$ la parabola non interseca l'asse x; • se $\Delta = 0$ la parabola è tangente all'asse x nel punto $(x_0, 0)$, essendo x_0 la soluzione (doppia) dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$; • se $\Delta > 0$ la parabola interseca l'asse x nei due punti distinti: $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ essendo x_1 e x_2 le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.		La parabola di equazione: • $y = x^2 + x + 1$ non interseca l'asse x perché $\Delta = -3 < 0$; • $y = x^2 - 4x + 4$ è tangente all'asse x perché $\Delta = 0$; • $y = x^2 - 2x - 3$ interseca l'asse x in due punti distinti perché $\Delta = 16 > 0$. L'equazione: $x^2 - 2x - 3 = 0$ ha come soluzioni: $x_1 = -1$ e $x_2 = 3$ I punti d'intersezione con l'asse x hanno coordinate: $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.
Il **punto d'intersezione** con l'asse $\boldsymbol{y}$: la parabola interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, c)$.		La parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, -3)$.

Interpretazione grafica dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$		
$\Delta > 0$ La parabola interseca l'asse x in due punti distinti, le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione.	 $\Delta > 0, a > 0$	 $\Delta > 0, a < 0$
$\Delta = 0$ La parabola è tangente all'asse x in un punto la cui ascissa è la soluzione (doppia) dell'equazione.	 $\Delta = 0, a > 0$	 $\Delta = 0, a < 0$
$\Delta < 0$ La parabola **non** interseca l'asse x in alcun punto (infatti l'equazione non ha soluzioni reali).	 $\Delta < 0, a > 0$	 $\Delta < 0, a < 0$

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella.

Studio della parabola di equazione $y = x^2 + 4x + 2$	
Quali sono i coefficienti dell'equazione della parabola?	$a = 1$ $b =$ .... $c =$ ....
Qual è la concavità della parabola?	Essendo $a > 0$, si può prevedere che la parabola avrà la concavità rivolta verso ....
Qual è il vertice della parabola?	$x_V = -\frac{b}{2a} =$ .... e $y_V =$ ....
Determina alcuni punti della parabola.	x: −5, −4, −3, −2, −1, 0, 1 $y = x^2 + 4x + 2$: 7, ..., ..., ..., ..., 2, ... Quindi la parabola passa per i punti di coordinate: ....
Grafico compatibile con le informazioni precedenti.	
In quale punto la parabola interseca l'asse y?	Nel punto di coordinate: (0, ...).
In quali punti la parabola interseca l'asse x?	Le ascisse dei punti d'intersezione con l'asse x sono le soluzioni dell'equazione $x^2 + 4x + 2 = 0$. Questa equazione ha come soluzioni: $x = \frac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots}}{\ldots\ldots} = \begin{cases} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \end{cases}$ I punti d'intersezione della parabola con l'asse x hanno coordinate: ....

2 Completa la seguente tabella.

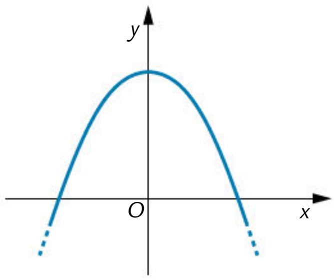
Equazione della parabola	**Concavità della parabola**	**Ascissa del vertice**	**Ordinata del vertice**	**La parabola interseca l'asse x?**
$y = -x^2 + 4x$	☐ Verso l'alto ☒ Verso il basso	$x_V = 2$	$y_V = 4$	☒ Sì ☐ No perché $\Delta > 0$
$y = x^2 - 5$	☐ Verso l'alto ☐ Verso il basso	$x_V =$	$y_V =$	☐ Sì ☐ No perché ....
$y = x^2 - 4x + 5$	☐ Verso l'alto ☐ Verso il basso	$x_V =$	$y_V =$	☐ Sì ☐ No perché ....
$y = x^2 - (2x + 1)^2$	☐ Verso l'alto ☐ Verso il basso	$x_V =$	$y_V =$	☐ Sì ☐ No perché ....

Esercizi da svolgere

Test

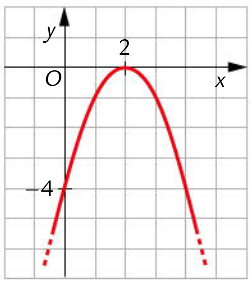
1 Se $y = ax^2 + bx + c$ è l'equazione della parabola in figura, allora:

A $b = 0 \land a > 0$
B $c = 0 \land a < 0$
C $b = 0 \land a < 0$
D $c = 0 \land a > 0$



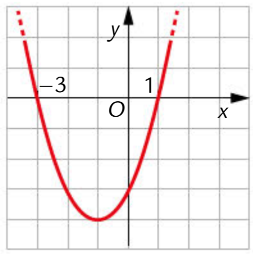
2 L'equazione della parabola in figura è:

A $y = x^2 - 4x + 4$
B $y = x(x - 2)$
C $y = x(x + 4)$
D $y = -(x - 2)^2$



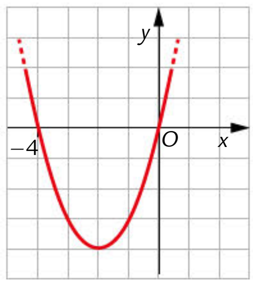
3 L'equazione della parabola in figura è:

A $y = x^2 - 2x - 3$
B $y = -x^2 - 2x + 3$
C $y = x^2 + 2x - 3$
D $y = -x^2 + 2x + 3$



4 L'equazione della parabola in figura è:

A $y = x^2 - 8x + 16$
B $y = x^2 + 8x + 16$
C $y = x^2 + 4x$
D $y = x^2 - 4x$



Traccia i grafici delle seguenti parabole, dopo averne determinato il vertice e i punti d'intersezione con gli assi cartesiani.

5 $y = -x^2 + 2x + 1$ $\qquad y = x^2 - 4x + 4$ $\qquad y = 2x^2 - x - 1$

6 $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 2x$ $\qquad y = 4 - x^2$ $\qquad y = x^2 - 2x + 2$

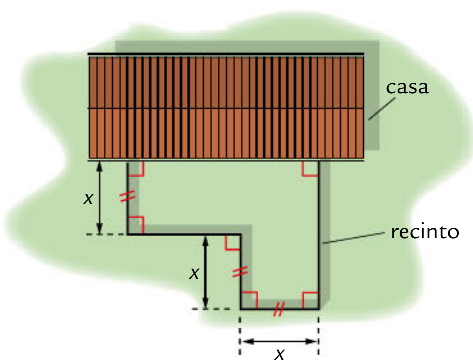
7 Determina l'area del triangolo che ha come vertici i punti d'intersezione della parabola di equazione $y = x^2 - x - 6$ con gli assi cartesiani. [15]

8 Determina l'area del triangolo che ha come vertici i punti d'intersezione della parabola di equazione $y = 2x^2 - 3x - 5$ con gli assi cartesiani. $\left[\dfrac{35}{4}\right]$

Problemi e modelli

9 Si vuole costruire un recinto dalla forma indicata in figura, intorno a un lato di una casa (i tre lati contrassegnati con lo stesso simbolo sono congruenti). Si vogliono utilizzare 45 m di rete.
Indicata con x la lunghezza, in metri, dei tre lati congruenti del recinto, stabilisci per quali valori di x:

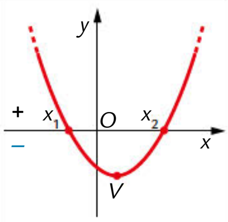
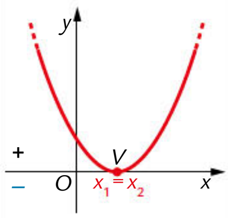
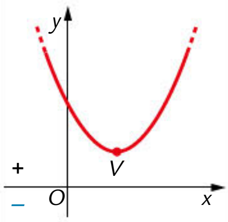
a. è possibile costruire il recinto;
b. si ottiene il recinto di area massima.



[**a.** $0 < x < 9$; **b.** $x = 7{,}5$]

Sintesi visuale

Disequazioni di secondo grado in cui $a > 0$

Interpretazione grafica		**Soluzioni delle disequazioni**			
Discriminante	Parabola corrispondente	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$		$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$		$\forall x \in \mathbf{R} - \{x_1\}$	$\forall x \in \mathbf{R}$	Nessun valore di x	$x = x_1$
$\Delta < 0$		$\forall x \in \mathbf{R}$	$\forall x \in \mathbf{R}$	Nessun valore di x	Nessun valore di x

ATTENZIONE

Se $a < 0$, puoi ricondurti al caso in cui $a > 0$ cambiando i segni e il verso della disequazione. Alternativamente, puoi continuare a «leggere» le soluzioni delle disequazioni di secondo grado sui grafici delle parabole corrispondenti: il metodo di lettura è del tutto analogo, ma gli insiemi delle soluzioni che si deducono dai grafici sono diversi perché le parabole hanno la concavità rivolta verso il basso.

ESEMPI

Risolviamo le seguenti disequazioni.

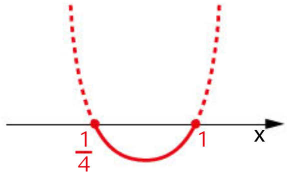
1. $4x^2 - 5x + 1 < 0$

Si ha:

- $a = 4 > 0$: la concavità è verso l'alto.
- $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$: i punti di intersezione con l'asse x sono due e le loro ascisse sono date dalle soluzioni dell'equazione:

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

- La parabola ha il grafico del tipo in figura.
- I punti della parabola di ordinata negativa hanno ascissa $\frac{1}{4} < x < 1$.
- Le soluzioni della disequazione sono: $\frac{1}{4} < x < 1$.



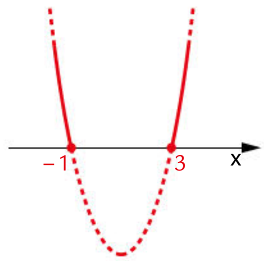
2. $x^2 - 2x - 3 > 0$

Si ha:

- $a = 1 > 0$: la concavità è verso l'alto.
- $\frac{\Delta}{4} = 1 + 3 = 4 > 0$: i punti di intersezione con l'asse x sono *due* e le loro ascisse sono date dalle soluzioni dell'equazione:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

- La parabola ha il grafico del tipo in figura.
- I punti della parabola di ordinata positiva hanno ascissa $x < -1 \vee x > 3$.
- Le soluzioni della disequazione sono: $x < -1 \vee x > 3$.

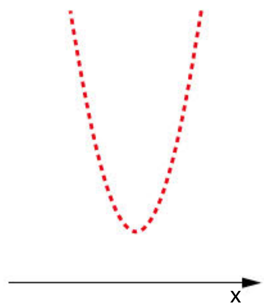


3. $-x^2 + 2x - 3 > 0$

Cambiamo il segno e il verso della disequazione in modo da ottenere una disequazione equivalente in cui $a > 0$: $x^2 - 2x + 3 < 0$

Si ha:

- $a = 1 > 0$: la concavità è verso l'alto.
- $\frac{\Delta}{4} = 1 - 3 < 0$: *nessuna* intersezione con l'asse x.
- La parabola ha il grafico del tipo in figura.
- Nessun punto della parabola ha ordinata *negativa*.
- L'insieme delle soluzioni della disequazione è: $S = \varnothing$.



Lezione 9 C

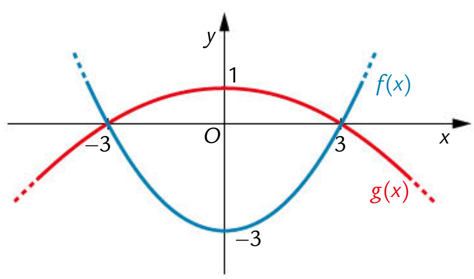
Esercizi da svolgere

FOCUS SUGLI ERRORI

Errori più comuni	Esempi di errore	Esempi corretti
non riconoscere disequazioni impossibili o sempre verificate	**1.** $-x^2-1>0 \to -1<x<1$ **2.** $2x^2+15 \geq 0 \to x \geq -\sqrt{\frac{15}{2}}$ **Errato!**	**1.** $-x^2-1>0 \to$ impossibile, poiché la quantità a primo membro assume solo valori negativi **2.** $2x^2+15 \geq 0 \to$ sempre verificata, poiché la quantità a primo membro assume solo valori positivi **Corretto**
non cambiare il verso della disuguaglianza quando si dividono entrambi i membri per un numero negativo	$-x^2 \leq 10 \to x^2 \leq -10 \to$ impossibile **Errato!**	$-x^2 \leq 10 \to x^2 \geq -10 \to$ sempre verificata **Corretto**
non accorgersi del coefficiente *a* negativo	$-2x^2+3x+5>0$ Le soluzioni dell'equazione associata sono: $x=-2 \vee x=5$ La disequazione ha soluzioni: $x<-2 \vee x>5$ **Errato!**	$-2x^2+3x+5>0 \to 2x^2-3x-5<0$ Le soluzioni dell'equazione associata sono: $x=-2 \vee x=5$ La disequazione ha soluzioni: $-2<x<5$ Oppure: $-2x^2+3x+5>0$ Le soluzioni dell'equazione associata sono: $x=-2 \vee x=5$ Poiché $a<0$, la disequazione ha soluzioni: $-2<x<5$ **Corretto**
eliminare i comuni denominatori senza studiarne il segno	$\frac{x^2}{\cancel{x^2-1}} > \frac{x+2}{\cancel{x^2-1}} \to x^2 > x+2$ **Errato!**	$\frac{x^2}{x^2-1} > \frac{x+2}{x^2-1} \to \frac{x^2-x-2}{x^2-1} > 0$ in seguito si studia il segno di ciascun fattore **Corretto**

Test

1 Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ rappresentate in figura, il sistema $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$ ha come soluzioni:



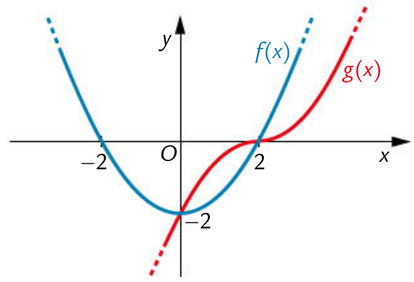
A tutti i numeri reali

B nessun numero reale

C $-3<x<3$

D $x<-3 \vee x>3$

2 Date le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ rappresentate in figura, il sistema $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$ è verificato per:



A $-2<x \leq 2$

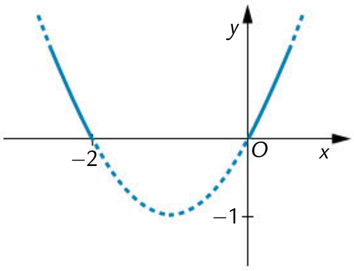
B $x>2$

C $x \geq 2$

D $x<-2 \vee x \geq 0$

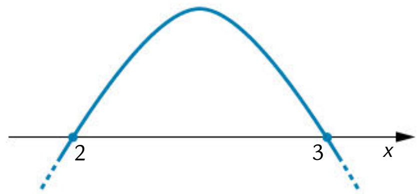
3 La figura rappresenta la risoluzione grafica della disequazione:

A $x^2 + 2x \geq 0$
B $x^2 + 2 \geq 0$
C $x^2 + 4x + 4 \geq 0$
D $x^2 - 2x \geq 0$



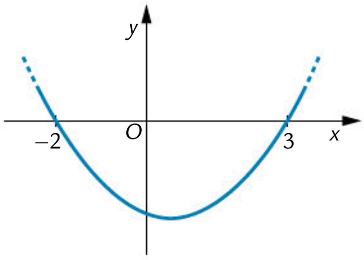
4 Dal grafico in figura si può dedurre che il trinomio $-x^2 + 5 - 6$ è non negativo per:

A $x < 2 \vee x > 3$
B $x \leq 2 \vee x \geq 3$
C $2 < x < 3$
D $2 \leq x \leq 3$



5 I punti a ordinata negativa della parabola in figura sono dati da:

A $-2 \leq x \leq 3$
B $-2 < x < 3$
C $x \leq -2 \vee x \geq 3$
D $x > -2 \vee x > 3$



Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

6 $x^2 - 3x - 4 > 0$ $[x < -1 \vee x > 4]$

7 $-x^2 + 5x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 5]$

8 $x^2 - 9 < 0$ $[-3 < x < 3]$

9 $-x^2 + 5x - 4 \leq 0$ $[x \leq 1 \vee x \geq 4]$

10 $x^2 - x + 1 < 0$ [Impossibile]

11 $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$ $\left[x = \frac{1}{3}\right]$

12 $x^2 - 2x + 3 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

13 $2x^2 - x - 1 \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

14 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1 \geq 0$ $[3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}]$

15 $9x^2 - 6x + 1 > 0$ $\left[\forall x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

16 $x^2 - 1 < 0$ $[-1 < x < 1]$

17 $2x^2 - x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

18 $(x + 4)^2 \geq 9$ $[x \leq -7 \vee x \geq -1]$

19 $6x - 3x^2 \leq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 2]$

20 $5 - x^2 > 0$ $[-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}]$

21 $(2x - 1)^2 \leq 0$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

22 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 > 0$ $\left[\frac{1 - \sqrt{19}}{3} < x < \frac{1 + \sqrt{19}}{3}\right]$

23 $(3x - 5)^2 > -10$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

24 $x^2 - 3x \geq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 3]$

25 $(x - 1)^2 \leq 0$ $[x = 1]$

26 $2x^2 - x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

27 $-x^2 + 5x < 0$ $[x < 0 \vee x > 5]$

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

28 $\dfrac{2x}{x^2 + 2x - 9} \leq 0$ $[x < -1 - \sqrt{10} < 0 \leq x < \sqrt{10} - 1]$

29 $\dfrac{5 - x}{x^2 - 4} < 0$ $[-2 < x < 2 \vee x > 5]$

30 $\dfrac{x^2 - 4}{x} > 0$ $[-2 < x < 0 \vee x > 2]$

31 $\dfrac{x^2 - 4x}{3 - x} < 0$ $[0 < x < 3 \vee x > 4]$

32 $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{3 - x} < 0$ $[-1 < x < 3 \vee x > 5]$

33 $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4} > 0$ $[x < -2 \vee x > 2]$

34 $\dfrac{x + 1}{2x - x^2} < 0$ $[-1 < x < 0 \vee x > 2]$

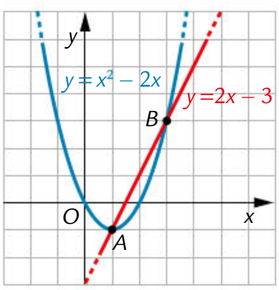
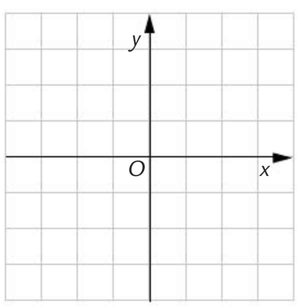
Lezione 10 B

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella, che ti guida a risolvere un sistema di secondo grado con il metodo di sostituzione, seguendo i passi indicati nella prima colonna e l'esempio svolto nella seconda.

Passi del procedimento	**Risolviamo il sistema:** $\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases}$	**Risolvi il sistema:** $\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}$
Risolvi l'equazione di primo grado rispetto a una delle due incognite, in questi due sistemi conviene risolvere rispetto a y.	$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$
Sostituisci l'espressione ottenuta per y nell'equazione di secondo grado del sistema.	$\begin{cases} -2x + 4 = x^2 + 2x - 1 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$	$\begin{cases} \ldots\ldots = x^2 - 4x + 3 \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$
Risolvi l'equazione risolvente ottenuta al passo precedente.	$-2x + 4 = x^2 + 2x - 1$ $x^2 + 4x - 5 = 0$ $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} -5 \\ 1 \end{cases}$	$\ldots\ldots = x^2 - 4x + 3$ $\ldots\ldots$ $x = \ldots\ldots \ \vee \ x = \ldots\ldots$
Ricava i valori di y corrispondenti ai valori di x trovati.	Ricordiamo ora che $y = -2x + 4$. $\begin{cases} x = -5 \\ y = -2(-5) + 4 = 14 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2(1) + 4 = 2 \end{cases}$	Ricorda ora che $y = \ldots\ldots$ $\begin{cases} x = \ldots \\ y = -2(\ldots) + \ldots = \ldots \end{cases}$ $\begin{cases} x = \ldots \\ y = -2(\ldots) + \ldots = \ldots \end{cases}$
Concludi.	Le soluzioni del sistema sono: $(-5, 14)$ e $(1, 2)$	Le soluzioni del sistema sono: $\ldots\ldots$

2 Completa la seguente tabella sulla base dell'esempio svolto.

Equazioni delle curve	**Tipo di curve**	**Rappresentazione nel piano cartesiano**	**Sistema per determinare i loro punti d'intersezione**	**Punti d'intersezione**
$y = x^2 - 2x$ $y = 2x - 3$	Parabola e retta		$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x - 3 \end{cases}$	$A(1, -1)$ $B(3, 3)$
$y = -x^2 + 4$ $y = x + 2$	…… …… ……		$\begin{cases} y = \ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots \end{cases}$	$A(\ldots, \ldots)$ $B(\ldots, \ldots)$