Sintesi visuale

Equazioni binomie

Equazione binomia (in x)

Equazione riconducibile alla forma:
$ax^n + b = 0$, con $a, b \in \mathbf{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbf{N} - \{0\}$
Può essere portata nella forma: $x^n = -\dfrac{b}{a}$

n dispari

L'equazione ammette sempre una sola soluzione reale:

$x = \sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}} = -\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}$

ESEMPIO

$2x^5 + 64 = 0 \Rightarrow x^5 = -32 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} \Rightarrow x = -2$

n pari

- Se $-\dfrac{b}{a} < 0$ l'equazione è impossibile
- Se $-\dfrac{b}{a} > 0$ allora $x = \pm\sqrt[n]{-\dfrac{b}{a}}$

ESEMPI

- $x^4 + 16 = 0 \Rightarrow x^4 = -16 \Rightarrow$ Impossibile
- $3x^6 - 1 = 0 \Rightarrow x^6 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[6]{3}}$

Equazioni trinomie

Equazione trinomia (in x)

Equazione riconducibile alla forma:
$ax^{2n} + bx^n + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbf{R} - \{0\}$ e $n \in \mathbf{N} - \{0\}$
Ponendo $x^n = t$ può essere portata nella forma: $at^2 + bt + c = 0$
Si distinguono tre casi, a seconda del discriminante Δ di questa equazione.

$\Delta < 0$

In questo caso l'equazione originaria non ha soluzioni.

ESEMPIO

$x^6 - x^3 + 1 = 0$

Poniamo:

$x^3 = t$

Otteniamo l'equazione:
$t^2 - t + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$

L'equazione è impossibile.

$\Delta = 0$

L'equazione in t ha due soluzioni coincidenti: $t_1 = t_2$.

Le soluzioni dell'equazione originaria sono le eventuali soluzioni dell'equazione binomia: $x^n = t_1$.

ESEMPIO

$25x^{10} - 20x^5 + 4 = 0$

Poniamo:

$x^5 = t$

Otteniamo l'equazione:

$25t^2 - 20t + 4 = 0$

$(5t - 2)^2 = 0$

$t = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x^5 = \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \sqrt[5]{\dfrac{2}{5}}$

$\Delta > 0$

L'equazione in t ha due soluzioni distinte t_1 e t_2.
Le soluzioni dell'equazione originaria sono le eventuali soluzioni delle due equazioni binomie: $x^n = t_1$ e $x^n = t_2$.

ESEMPIO

$6x^8 - x^4 - 1 = 0$

Poniamo: $x^4 = t$

Otteniamo l'equazione:

$6t^2 - t - 1 = 0$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{12} = \left\langle \begin{array}{l} -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^4 = -\dfrac{1}{3} \vee x^4 = \dfrac{1}{2}$

La prima equazione è impossibile, la seconda fornisce le soluzioni: $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcune equazioni binomie.

1

Passi del procedimento	Risolvere l'equazione: $8x^3 + 27 = 0$	Risolvere l'equazione: $x^3 + 2 = 0$
Poni l'equazione $ax^n + b = 0$ nella forma $x^n = -\frac{b}{a}$.	$8x^3 + 27 = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{.....}{.....}$	$x^3 + 2 = 0 \Rightarrow x^3 = -.....$
Essendo n dispari, l'equazione ha un'unica soluzione $x = \sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.	La soluzione dell'equazione è $x = \sqrt[3]{-\frac{.....}{.....}} = -\frac{.....}{.....}$	La soluzione dell'equazione è $x = \sqrt[3]{-.....} = -\sqrt[3]{.....}$

2

Passi del procedimento	Risolvere l'equazione: $16x^4 + 1 = 0$	Risolvere l'equazione: $16x^4 - 1 = 0$
Poni l'equazione $ax^n + b = 0$ nella forma $x^n = -\frac{b}{a}$.	$16x^4 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = -\frac{1}{.....}$	$16x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = \frac{1}{.....}$
Essendo n pari: • se $-\frac{b}{a} < 0$ allora l'equazione risulta impossibile; • se $-\frac{b}{a} > 0$ l'equazione ha due soluzioni opposte $x = \pm\sqrt[n]{-\frac{b}{a}}$.	$-\frac{b}{a} = -\frac{1}{.....}.....0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ l'equazione è	$-\frac{b}{a} = \frac{1}{.....}.....0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ l'equazione ammette due soluzioni opposte: $x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{.....}} = \pm\frac{1}{.....}$

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcune equazioni trinomie.

3

Passi del procedimento	Risolvere l'equazione $x^6 - 26x^3 - 27 = 0$.
Poni $t = x^3$.	L'equazione diventa: $t^2 - .....\ t - ..... = 0$
Risolvi l'equazione di secondo grado così ottenuta nell'incognita t.	$t^2 - .....t - ..... = 0 \Rightarrow (t+1)(t - .....) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = -1 \vee t = ...$
Rimpiazza x^3 a t e risolvi le due equazioni binomie così ottenute.	Ottieni $x^3 = -1 \vee x^3 = ...$ • $x^3 = -1 \Rightarrow x = ...$ • $x^3 = ... \Rightarrow x = ...$
Concludi.	L'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{-.....,\ .....\}$.

4

Passi del procedimento	Risolvere l'equazione $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.
Poni $t = x^2$.	L'equazione diventa: $t^2 - .....\ t - ..... = 0$
Risolvi l'equazione di secondo grado così ottenuta nell'incognita t.	$t^2 - .....t - ..... = 0 \Rightarrow (t+2)(t - .....) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = -2 \vee t = ...$
Rimpiazza x^2 a t e risolvi le due equazioni binomie così ottenute.	Ottieni $x^2 = -2 \vee x^2 = ...$ • $x^2 = -2 \Rightarrow$ l'equazione è .... • $x^2 = ... \Rightarrow x = \pm\sqrt{.....} = \pm.....$
Concludi.	L'insieme delle soluzioni dell'equazione data è $S = \{-.....,\ .....\}$.

Esercizi da svolgere

Risolvi in R le seguenti equazioni binomie.

1 $x^4 - 2 = 0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

2 $x^4 + 4 = 0$ [Impossibile]

3 $8x^3 - 1 = 0$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

4 $x^3 + 1 = 0$ $[-1]$

5 $x^8 - 4 = 0$ $[\pm\sqrt[4]{2}]$

6 $x^3 - 2\sqrt{2} = 0$ $[\sqrt{2}]$

7 $x^6 - 6 = 0$ $[\pm\sqrt[6]{6}]$

8 $x^6 + 6 = 0$ [Impossibile]

9 $x^4 - 4 = 0$ $[\pm\sqrt{2}]$

10 $x^5 + 32 = 0$ $[-2]$

11 $16x^4 - 1 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2}\right]$

12 $x^4 = \sqrt{2} - \sqrt{3}$ [Impossibile]

13 $x^3 - 27 = 0$ $[3]$

14 $4x^4 - 1 = 0$ $\left[\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

15 $x^6 + 1 = 0$ [Impossibile]

16 $32x^5 + 1 = 0$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

17 $9x^6 - 1 = 0$ $\left[\pm\frac{\sqrt[3]{9}}{3}\right]$

18 $64x^8 + 32 = 0$ [Impossibile]

Risolvi in R le seguenti equazioni trinomie.

19 $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ $[\pm 1, \pm\sqrt{2}]$

20 $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ $[\pm 2, \pm\sqrt{2}]$

21 $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ $\left[\pm 1, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

22 $x^4 - x^2 - 12 = 0$ $[\pm 2]$

23 $x^6 + x^3 - 6 = 0$ $[-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{2}]$

24 $x^8 - 10x^4 + 9 = 0$ $[\pm 1, \pm\sqrt{3}]$

25 $x^6 - 10x^3 + 9 = 0$ $[1, \sqrt[3]{9}]$

26 $x^{10} - 20x^5 + 100 = 0$ $[\sqrt[5]{10}]$

27 $x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ $[\pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}]$

28 $3x^4 - 2x^2 - 5 = 0$ $\left[\pm\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$

29 $x^{12} + 5x^6 + 1 = 0$ [Impossibile]

30 $x^6 - 4\sqrt{3}x^3 + 9 = 0$ $[\sqrt{3}, \sqrt[6]{3}]$

31 $x^4 - x^2 - 6 = 0$ $[\pm\sqrt{3}]$

32 $x^6 + 13x^3 + 40 = 0$ $[-\sqrt[3]{5}, -2]$

33 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ $[\pm 2, \pm 3]$

34 $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ [Impossibile]

35 $16x^4 + 63x^2 - 4 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{4}\right]$

36 $x^{12} + x^6 - 2 = 0$ $[\pm 1]$

37 $x^8 + 6x^4 - 7 = 0$ $[\pm 1]$

Risolvi in R le seguenti equazioni, dopo averle scomposte mediante opportuni raccoglimenti.

38 $x^5 + x^3 = 0$ $[0]$

39 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ $[-1, 0, 2]$

40 $x^5 + x^3 - 2x^2 - 2 = 0$ $[\sqrt[3]{2}]$

41 $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ $[\pm 1]$

42 $3x^3 + 2x^2 - 6x - 4 = 0$ $\left[\pm\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\right]$

43 $x^5 - 9x^3 - x^2 + 9 = 0$ $[\pm 3, 1]$

44 $(x^2 - 1)^2 = 4x^2$ $[-1 \pm \sqrt{2}, 1 \pm \sqrt{2}]$

45 $3x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 6x = 0$ $\left[0, \pm\sqrt{3}, -\frac{2}{3}\right]$

46 $4x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ $\left[\pm\frac{1}{2}, 1\right]$

47 $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = 0$ $[0, 1]$

48 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$ $[\pm 1]$

Lezione 2 A

Disequazioni

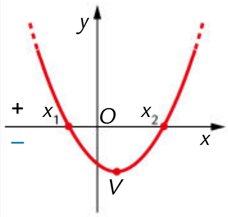
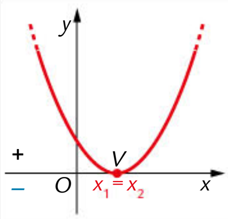
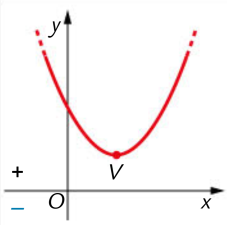
Sintesi visuale

Disequazione di secondo grado

Una disequazione razionale intera nell'incognita x si dice di *secondo grado* quando è riconducibile a una delle seguenti forme normali:

$ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$,
$ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ con $a \neq 0$.

Disequazioni di secondo grado in cui $a > 0$

Interpretazione grafica		**Soluzioni delle disequazioni**			
Discriminante	Parabola corrispondente	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$\Delta > 0$		$x < x_1 \vee x > x_2$	$x \leq x_1 \vee x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
$\Delta = 0$		$\forall x \in \mathbf{R} - \{x_1\}$	$\forall x \in \mathbf{R}$	Nessun valore di x	$x = x_1$
$\Delta < 0$		$\forall x \in \mathbf{R}$	$\forall x \in \mathbf{R}$	Nessun valore di x	Nessun valore di x

ATTENZIONE

Se $a < 0$, puoi ricondurti al caso in cui $a > 0$ cambiando i segni e il verso della disequazione. Alternativamente, puoi continuare a «leggere» le soluzioni delle disequazioni di secondo grado sui grafici delle parabole corrispondenti: il metodo di lettura è del tutto analogo, ma gli insiemi delle soluzioni che si deducono dai grafici sono diversi perché le parabole hanno la concavità rivolta verso il basso.

Disequazioni di grado superiore al secondo

La disequazione ha una delle forme:

$A(x) > 0$, $A(x) \geq 0$,
$A(x) < 0$, $A(x) \leq 0$

dove $A(x)$ è un polinomio di grado superiore al secondo.

→ Si scompone il polinomio in fattori di primo o secondo grado o di grado superiore di cui si sa studiare il segno.

↓ Si studia il segno di ciascun fattore.

↓ Si costruisce la tabella riassuntiva, in cui si riporta il segno di ciascun fattore.

→ Si deduce, in base alla regola dei segni, il segno di $A(x)$ in ciascun intervallo che si è venuto a determinare.

↓ Si deduce, dalla tabella, l'insieme delle soluzioni della disequazione.

Procedimento per risolvere una disequazione frazionaria

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $\frac{1}{x} \geq x$.

1. Scriviamo la disequazione in forma normale: $\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x} \geq 0$

2. Scomponiamo il numeratore in fattori: $\frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0$

3. Studiamo il segno dei fattori:
1° fattore: $1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1$
2° fattore: $1+x > 0 \Rightarrow x > -1$
3° fattore: $x > 0 \Rightarrow x > 0$

4. Costruiamo la tabella dei segni, riportando il segno di ciascun fattore e deducendo in ciascun intervallo il segno del quoziente in base alla regola dei segni.

x		-1		0		1	
segno di $(1-x)$	+		+	0	+		−
segno di $(1+x)$	−	0	+		+	0	+
segno di x	−		−		+		+
segno di $\frac{1-x^2}{x}$	+	0	−	∄	+	0	−

Simbolo di non esistenza: dove il denominatore si annulla la frazione algebrica non esiste

5. La disequazione data è soddisfatta quando la frazione $\frac{(1-x)(1+x)}{x}$ è positiva o nulla, cioè per $x \leq -1 \vee 0 < x \leq 1$.

Schema riassuntivo di una disequazione frazionaria

Disequazione non in forma normale → si portano tutti i termini al primo membro, si riducono tutte le frazioni allo stesso denominatore e si sommano, in modo da avere una sola frazione al primo membro e 0 al secondo membro

↓

disequazione in forma normale
- $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} \leq 0$
- $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$

→ si scompongono i polinomi $A(x)$ e $B(x)$ in fattori di cui si sa studiare il segno (solitamente di primo o secondo grado)

↓

si studia il segno di ciascun fattore

↓

si costruisce una tabella riassuntiva dove si riporta il segno di ciascun fattore e si deduce, in base alla regola dei segni, il segno del quoziente in ciascun intervallo che si è venuto a determinare

↓

si deduce dalla tabella l'insieme delle soluzioni della disequazione

Procedimento per risolvere un sistema di disequazioni

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x - 3 \geq \dfrac{4}{x} \\ \dfrac{1}{4} - x^2 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione del sistema:

$$x - 3 \geq \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad x - 3 - \frac{4}{x} \geq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2 - 3x - 4}{x} \geq 0$$

Segno del numeratore:

$$x^2 - 3x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 4)(x + 1) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x < -1 \vee x > 4$$

Segno del denominatore:

$$x > 0$$

La tabella dei segni è:

		-1		0		4		x
	+	0	−		−	0	+	
	−		−	0	+		+	
	−	0	+	∄	−	0	+	

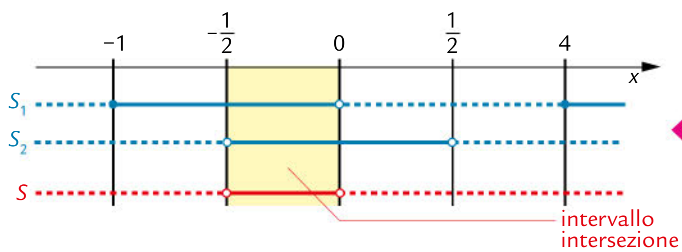
La disequazione è verificata quando la frazione è positiva o nulla, cioè per:

$$-1 \leq x < 0 \vee x \geq 4$$

Risolviamo la seconda disequazione del sistema:

$$\frac{1}{4} - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Rappresentiamo in un unico schema l'insieme S_1 delle soluzioni della prima disequazione e l'insieme S_2 delle soluzioni della seconda.



L'insieme S delle soluzioni del sistema è:

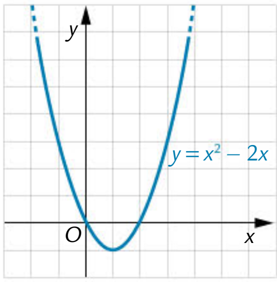
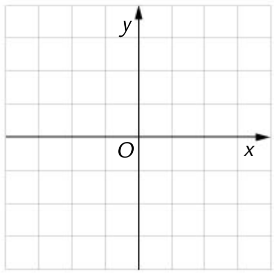
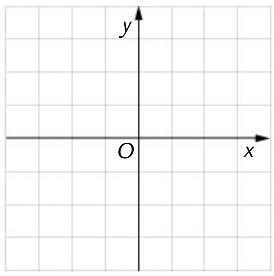
$$-\frac{1}{2} < x < 0$$

METODO

1. Si risolvono le singole disequazioni del sistema.
2. Aiutandosi con uno schema grafico, si individua l'intersezione degli insiemi delle soluzioni delle singole disequazioni.
3. Si scrive l'insieme delle soluzioni del sistema, che è l'intersezione individuata al punto precedente.

Esercizi guidati

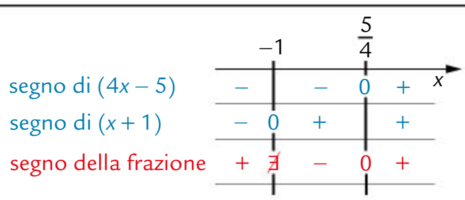
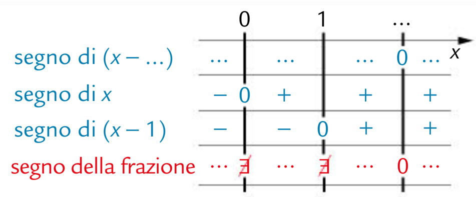
1 Completa la seguente tabella sulla base dell'esempio svolto.

<table>
<tr><th>Disequazione</th><th>Grafico della parabola corrispondente</th><th>Soluzioni della disequazione</th></tr>
<tr><td>$x^2 - 2x > 0$</td><td>
</td><td>$x < 0 \ \vee \ x > 2$</td></tr>
<tr><td>$1 - x^2 > 0$</td><td>
</td><td>..</td></tr>
<tr><td>$x^2 - 2 \leq 0$</td><td>
</td><td>..</td></tr>
</table>

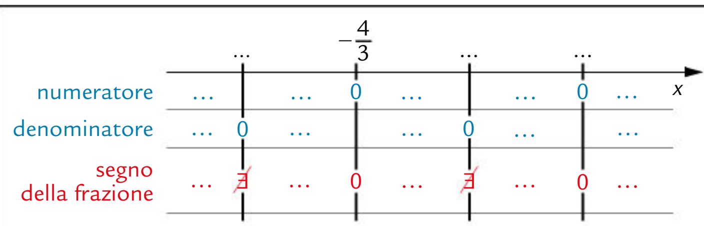
2 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere una disequazione di grado superiore al secondo.

<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th>Risolvere la disequazione $x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0$.</th></tr>
<tr><td>Scomponi il primo membro in fattori di primo o secondo grado.</td><td>$x(x^2 - 4x - 5) \leq 0 \Rightarrow x(x-5)(x + ...) \leq 0$</td></tr>
<tr><td>Studia il segno di ciascun fattore, andando a cercare quando è positivo.</td><td>1° fattore: $x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$
2° fattore: $x - 5 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 5$
3° fattore: $x + ... > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -.....$</td></tr>
<tr><td>Costruisci la tabella dei segni riassuntiva del segno dei tre fattori.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th></th><th>$-...$</th><th></th><th>0</th><th></th><th>5</th><th>x</th></tr>
<tr><td>segno di x</td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>segno di $(x-5)$</td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>segno di $(x + ...)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td><td></td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>segno di $x(x-5)(x+...)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Concludi.</td><td>La disequazione è soddisfatta quando il polinomio $x^3 - 4x^2 - 5x$ è negativo o nullo. Dalla tabella si vede che ciò accade per: $x \leq -..... \vee 0 \leq x \leq .....$</td></tr>
</table>

3 Completa la seguente tabella, seguendo i passi indicati nella prima colonna e l'esempio svolto nella seconda colonna.

Passi del procedimento	**Risolviamo la disequazione:** $\frac{x-2}{x+1} \geq -\frac{1}{3}$	**Disequazione da risolvere:** $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2-x} \leq \frac{1}{x-1}$
Riscrivi la disequazione in forma normale e scomponi i polinomi a numeratore e denominatore.	$\frac{x-2}{x+1} + \frac{1}{3} \geq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{3x-6+x+1}{3(x+1)} \geq 0 \Rightarrow \frac{4x-5}{(x+1)} \geq 0$ è possibile moltiplicare i due membri per 3 poiché si tratta di un fattore positivo	$\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} \leq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{2(\ldots\ldots)-1-x}{x(x-1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{x-\ldots}{x(x-1)} \leq 0$
Studia il segno di ciascun fattore.	1° fattore: $4x-5>0 \Rightarrow x > \frac{5}{4}$ 2° fattore: $x+1>0 \Rightarrow x > -1$	1° fattore: $x - \ldots > 0 \Rightarrow x > \ldots$ 2° fattore: $x > 0$ 3° fattore: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > \ldots$
Costruisci la tabella dei segni.	 Nella tabella si è usato uno *zero* come simbolo per indicare l'annullarsi di un fattore o della frazione e il simbolo ∄ per indicare i valori di x in corrispondenza dei quali la frazione non è definita.	
Concludi.	La disequazione è soddisfatta quando la frazione è *positiva* o *nulla*. Dalla tabella si deduce che ciò accade per $x < -1 \vee x \geq \frac{5}{4}$.	La disequazione è soddisfatta quando la frazione è .... o .... Dalla tabella si deduce che ciò accade per $x <$ ..... ∨ .... x ....

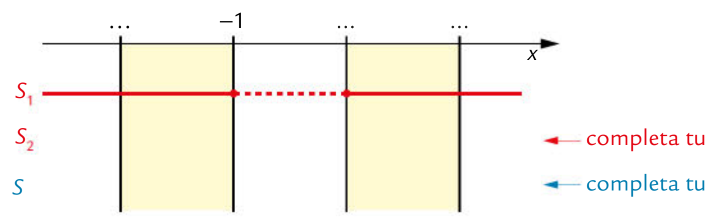
4 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere una disequazione frazionaria.

Passi del procedimento	**Risolvere la disequazione** $\frac{x+1}{2x+x^2} < \frac{3}{8}$.
Riscrivi la disequazione in forma normale e scomponi i polinomi a numeratore e denominatore.	$\frac{x+1}{2x+x^2} - \frac{3}{8} < 0 \Rightarrow \frac{8(\ldots\ldots)-3(\ldots\ldots)}{8x(x+2)} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{-3x^2+\ldots x+\ldots}{8x(x+2)} < 0 \Rightarrow -\frac{(3x+\ldots)(x-\ldots)}{8x(x+2)} < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{(3x+\ldots)(x-\ldots)}{8x(x+2)} > 0$
Studia il segno di ciascun fattore.	Numeratore: $(3x+\ldots)(x-\ldots) > 0 \Rightarrow x < -\frac{4}{3} \vee$ .... Denominatore: $8x(x+2) > 0 \Rightarrow$ ....
Costruisci la tabella dei segni.	
Concludi.	La disequazione è soddisfatta quando la funzione è .... Dalla tabella si deduce che ciò accade per ....

5 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere una disequazione frazionaria.

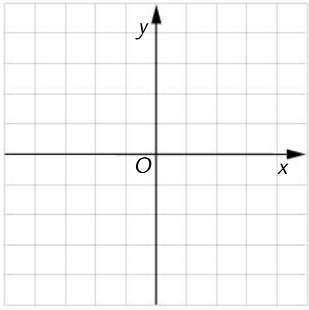
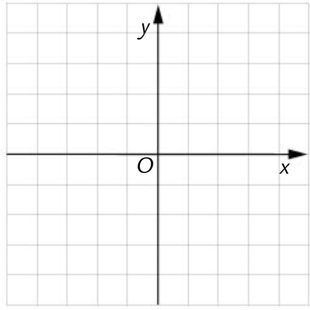
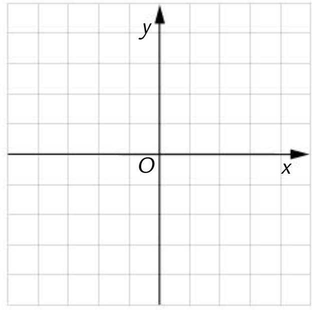
<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th>Risolvere la disequazione:
$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1} \leq -\dfrac{2}{x-1}$</th></tr>
<tr><td>Riconduci la disequazione alla forma $\dfrac{A(x)}{B(x)} \leq 0$.</td><td>$\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{(x+1)(x-1)} + \dfrac{2}{x-1} \leq 0$ Scomponendo i denominatori e portando tutti i termini al primo membro
$\dfrac{x-1-1+2(\ldots\ldots\ldots)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$ Eseguendo la somma algebrica
$\dfrac{\ldots\ldots}{(x+1)(x-1)} \leq 0$ Svolgendo i calcoli</td></tr>
<tr><td>Studia il segno di ciascun fattore, andando a cercare quando è positivo.</td><td>1° fattore: $\ldots\ldots\ldots > 0 \Rightarrow x > \ldots\ldots\ldots$
2° fattore: $x+1 > 0 \Rightarrow x > \ldots\ldots\ldots$
3° fattore: $x-1 > 0 \Rightarrow x > \ldots\ldots\ldots$</td></tr>
<tr><td>Costruisci la tabella riassuntiva dei segni dei tre fattori.</td><td>
<table>
<tr><th></th><th></th><th>...</th><th></th><th>0</th><th></th><th>...</th><th>x</th></tr>
<tr><td>segno di ......</td><td>−</td><td></td><td>...</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td>...</td></tr>
<tr><td>segno di $(x+1)$</td><td>...</td><td>0</td><td>+</td><td></td><td>...</td><td></td><td>+</td></tr>
<tr><td>segno di $(x-1)$</td><td>−</td><td></td><td>...</td><td></td><td>−</td><td>0</td><td>...</td></tr>
<tr><td>segno di $\dfrac{\ldots}{(x+1)(x-1)}$</td><td>...</td><td>∄</td><td>+</td><td>0</td><td>...</td><td>∄</td><td>+</td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Concludi.</td><td>La disequazione data è soddisfatta quando la frazione $\dfrac{\ldots\ldots\ldots}{(x+1)(x-1)}$ è negativa o nulla. Dalla tabella si vede che ciò accade per:
$x < \ldots\ldots\ldots \vee \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$</td></tr>
</table>

6 Completa la seguente tabella in cui vieni guidato a risolvere un sistema di disequazioni.

<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th>Risolvere il sistema:
$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases}$</th></tr>
<tr><td>Risolvi le singole disequazioni del sistema.</td><td>La prima disequazione del sistema è soddisfatta negli intervalli .... alle soluzioni dell'equazione $x^2 - 1 = 0$, cioè per i valori di x tali che:
$x \leq -1 \vee x \geq \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow S_1$
La seconda disequazione del sistema è soddisfatta nell'intervallo interno alle soluzioni dell'equazione $x^2 + x - 6 = 0$, cioè per:
$\ldots\ldots\ldots\ldots \leq x \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \longrightarrow S_2$</td></tr>
<tr><td>Rappresenta gli insiemi delle soluzioni delle disequazioni risolte al passo precedente (S_1 e S_2) e deduci qual è la loro intersezione (S).</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Concludi.</td><td>Il sistema è soddisfatto per:
$\ldots\ldots\ldots \leq x \leq -1 \vee \ldots\ldots\ldots \leq x \leq \ldots\ldots\ldots$</td></tr>
</table>

Esercizi da svolgere

1 Completa la seguente tabella.

Disequazione	$x^2 - 4 \geq 0$	$x^2 - 2x - 3 < 0$	$x^2 - 2x + 1 > 0$
Grafico della parabola corrispondente			
Soluzioni della disequazione	....	....	....

Risolvi le seguenti disequazioni di secondo grado.

2 $x^2 - 3x - 4 > 0$ $[x < -1 \vee x > 4]$

3 $-x^2 + 5x \geq 0$ $[0 \leq x \leq 5]$

4 $x^2 - 9 < 0$ $[-3 < x < 3]$

5 $-x^2 + 5x - 4 \leq 0$ $[x \leq 1 \vee x \geq 4]$

6 $x^2 - x + 1 < 0$ [Impossibile]

7 $x^2 - 2x + 3 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

8 $2x^2 - x - 1 \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x \geq 1\right]$

9 $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1 \geq 0$ $[3 - \sqrt{7} \leq x \leq 3 + \sqrt{7}]$

10 $9x^2 - 6x + 1 > 0$ $\left[\forall x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}\right]$

11 $x^2 - 1 < 0$ $[-1 < x < 1]$

12 $2x^2 - x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

13 $(x + 4)^2 \geq 9$ $[x \leq -7 \vee x \geq -1]$

14 $6x - 3x^2 \leq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 2]$

15 $5 - x^2 > 0$ $[-\sqrt{5} < x < \sqrt{5}]$

16 $(2x - 1)^2 \leq 0$ $\left[x = \frac{1}{2}\right]$

17 $(3x - 5)^2 > -10$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

18 $x^2 - 3x \geq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 3]$

19 $(x - 1)^2 \leq 0$ $[x = 1]$

20 $2x^2 - x - 1 < 0$ $\left[-\frac{1}{2} < x < 1\right]$

21 $-x^2 + 5x < 0$ $[x < 0 \vee x > 5]$

22 $x^2 - 4 \geq 0$ $[x \leq -2 \vee x \geq 2]$

23 $x^2 - 4 < 0$ $[-2 < x < 2]$

24 $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

25 $x^2 + 7x + 10 > 0$ $[x < -5 \vee x > -2]$

26 $2x^2 - 6x \leq 0$ $[0 \leq x \leq 3]$

27 $x^2 - 4x + 5 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

28 $-x^2 - 4x + 5 > 0$ $[-5 < x < 1]$

29 $x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \leq 0$ $\left[-2 \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

30 $x^2 + 3 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

31 $x^2 - 2x + 4 < 0$ [Impossibile]

32 $x^2 - 2x < 0$ $[0 < x < 2]$

33 $x^2 + 6x - 7 \leq 0$ $[-7 \leq x \leq 1]$

34 $x^2 - 2x + 1 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R} - \{1\}]$

35 $9x^2 - 1 \leq 0$ $\left[-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}\right]$

36 $x^2 - \frac{7}{4}x - \frac{1}{2} \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{1}{4} \vee x \geq 2\right]$

37 $2x^2 + 12x + 18 < 0$ [Impossibile]

38 $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{9} \geq 0$ $\left[x \leq -\frac{2}{3} \vee x \geq \frac{1}{3}\right]$

39 $x^2 + x + 1 > 0$ $[\forall x \in \mathbf{R}]$

Risolvi le seguenti disequazioni di grado superiore al secondo.

40 $x^3 - x^2 \geq 0$ $[x = 0 \vee x \geq 1]$

41 $x^3 + x^2 - 2x \geq 0$ $[-2 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1]$

42 $x^3 - 4x \leq 0$ $[x \leq -2 \vee 0 \leq x \leq 2]$

43 $x^3 - \frac{10}{3}x^2 + 3x - \frac{2}{3} > 0$ $\left[\frac{1}{3} < x < 1 \vee x > 2\right]$

44 $x^3 - \frac{2}{5}x^2 - x + \frac{2}{5} < 0$ $\left[x < -1 \vee \frac{2}{5} < x < 1\right]$

45 $(x-1)^2(x+1) - (x-2)(x+1) \leq x+1$ $[x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq 2]$

46 $(8 - x^3)(x^4 - 81)^3 > 0$ $[x < -3 \vee 2 < x < 3]$

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

47 $\frac{1}{x-1} > \frac{2}{x^2-1}$ $[x > -1]$

48 $\frac{3}{x-4} > \frac{x}{4-x}$ $[x < -3 \vee x > 4]$

49 $\frac{4-x}{x^3 - 6x^2 + 5x} \geq 0$ $[0 < x < 1 \vee 4 \leq x < 5]$

50 $\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} \leq 0$ $[x = 1]$

51 $\frac{x+1}{2x-4} - \frac{x+2}{2x+2} \geq \frac{x+3}{x^2 - x - 2}$ $\left[-1 < x < 2\right]$

52 $\frac{2x}{x^2 + 2x - 9} \leq 0$ $[x < -1 - \sqrt{10} \vee 0 \leq x < \sqrt{10} - 1]$

53 $\frac{5-x}{x^2-4} < 0$ $[-2 < x < 2 \vee x > 5]$

54 $\frac{x^2-4}{x} > 0$ $[-2 < x < 0 \vee x > 2]$

55 $\frac{x^2-4x}{3-x} < 0$ $[0 < x < 3 \vee x > 4]$

56 $\frac{x^2 - 4x - 5}{3-x} < 0$ $[-1 < x < 3 \vee x > 5]$

57 $\frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 - 4} > 0$ $[x < -2 \vee x > 2]$

58 $\frac{x+1}{2x - x^2} < 0$ $[-1 < x < 0 \vee x > 2]$

59 $\frac{-x^2 + 3x - 5}{8x - x^2} > 0$ $[x < 0 \vee x > 8]$

60 $\frac{x}{x^2-1} \geq 0$ $[-1 < x \leq 0 \vee x > 1]$

61 $\frac{x^2-4}{x+5} \geq 0$ $[-5 < x \leq -2 \vee x \geq 2]$

62 $\frac{x^2+x}{x^2-9} \geq 0$ $[x < -3 \vee -1 \leq x \leq 0 \vee x > 3]$

63 $\frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 6x} \leq 0$ $\left[-\frac{1}{2} \leq x < 0 \vee 1 \leq x < 6\right]$

64 $\frac{1}{x} > 4x$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee 0 < x < \frac{1}{2}\right]$

65 $\frac{1}{x-2} \leq 4 - x$ $[x < 2 \vee x = 3]$

66 $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} \geq \frac{4}{3}$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{2} \vee 2 < x \leq 3\right]$

67 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3x+3} \geq \frac{3}{2x+2}$ $\left[x < -1 \vee x \geq \frac{8}{3}\right]$

68 $\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2x-2}$ $[x < -1 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 3]$

69 $\frac{1}{x} + \frac{1}{3x-3} \leq \frac{1}{2x-2}$ $\left[x < 0 \vee 1 < x \leq \frac{6}{5}\right]$

70 $\frac{1}{x^2-x} - \frac{2}{x^2+x} > \frac{3}{x^2-1}$ $\left[-1 < x < 0 \vee \frac{3}{4} < x < 1\right]$

---

71 $\frac{64x - x^3}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} \leq 0$ $\left[x \leq -8 \vee 0 \leq x < 1 \vee x \geq 8\right]$

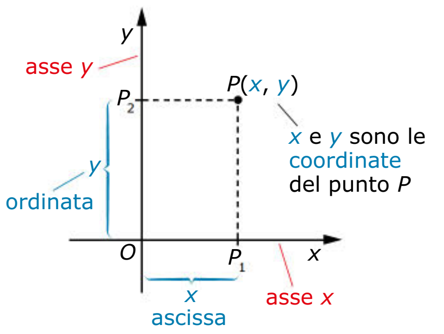
72 $\left(1 + \frac{3}{x+3}\right)^2\left(1 + \frac{3}{x}\right) \geq \left(3 - \frac{2}{x}\right)^2\left(1 - \frac{3}{x+3}\right)$ $[-3 < x \leq -1 \vee 0 < x \leq 4]$

Piano cartesiano e retta

Sintesi visuale

Il piano cartesiano

Piano cartesiano



Distanza tra due punti

La distanza tra due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

In particolare:

- $\overline{AB} = |x_B - x_A|$ se $y_B = y_A$
- $\overline{AB} = |y_B - y_A|$ se $x_B = x_A$

ESEMPIO

La distanza tra i punti $A(-3, -1)$ e $B(2, 2)$ è:

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

Punto medio di un segmento

Il **punto medio** di un segmento di estremi $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

ESEMPIO

Il punto medio del segmento di estremi $A(-2, 2)$ e $B(3, 4)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{-2+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

Baricentro di un triangolo

Il baricentro di un triangolo di vertici $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

ESEMPIO

Il baricentro del triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(-1, -1)$ e $C(3, -2)$ ha coordinate:

$$\left(\frac{1-1+3}{3}, \frac{2-1-2}{3}\right) = \left(1, -\frac{1}{3}\right)$$

La retta nel piano cartesiano

Equazione in forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

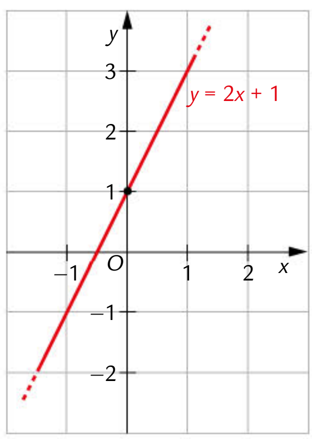
con $a \neq 0$ o $b \neq 0$

Equazione in forma esplicita

$$y = mx + q$$

- m è il **coefficiente angolare** (o **pendenza**) ed è legato all'ampiezza dell'angolo che la retta forma con l'asse x;
- q è l'**ordinata all'origine** ed è l'ordinata del punto d'intersezione della retta con l'asse y.

ESEMPIO



$$\underbrace{4x - 2y + 2 = 0}_{\text{forma implicita}}$$

$$\Downarrow$$

$$-2y = -4x - 2$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{y = 2x + 1}_{\text{forma esplicita}}$$

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità tra due rette

Due rette di equazioni
$y = mx + q$
$y = m'x + q'$

sono **parallele** se e solo se $m = m'$

ESEMPIO
Sono parallele:
$\underbrace{y = 3x - 1 \qquad y = 3x + 2}_{\text{stesso coefficiente angolare}}$

sono **perpendicolari** se e solo se $m \cdot m' = -1$

ESEMPIO
Sono perpendicolari:
$y = 4x - 1 \qquad y = -0{,}25x + 5$

antireciproci: $4 \cdot \underbrace{(-0{,}25)}_{-\frac{1}{4}} = -1$

Condizioni per determinare l'equazione di una retta

Retta per $P(x_0, y_0)$ di pendenza m

L'equazione della retta passante per $P(x_0, y_0)$ e di coefficiente angolare m è:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ESEMPIO
La retta passante per $P(1, -2)$ e parallela alla retta di equazione $y = 3x$ ha coefficiente angolare $m = 3$ quindi l'equazione della retta è:

$$y - (\underbrace{-2}_{y_P}) = \underbrace{3}_{m}(x - \underbrace{1}_{x_P}) \Rightarrow y = 3x - 5$$

Retta per due punti A e B

- L'equazione della retta passante per i punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, con $x_A \neq x_B$, è:
  $$y - y_A = m_{AB}(x - x_A)$$
  oppure
  $$y - y_B = m_{AB}(x - x_B)$$
  dove il coefficiente angolare m_{AB} è dato da:
  $$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
- L'equazione della retta passante per i due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, con $x_A = x_B$, è $x = x_A$.

ESEMPIO
I due punti $A(2, 6)$ e $B(-2, 4)$ hanno ascissa diversa. Il coefficiente angolare della retta passante per A e per B è:

$$m_{AB} = \frac{4 - 6}{-2 - 2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

L'equazione della retta AB si può scrivere, per esempio, come equazione della retta passante per A e di coefficiente angolare $\frac{1}{2}$:

$$y - 6 = \frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5$$

Distanza di un punto da una retta

Distanza tra $P(x_0, y_0)$ e una retta r

La distanza tra una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e un punto $P(x_0, y_0)$ è:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ESEMPIO
La distanza tra la retta r di equazione $3x - 4y + 1 = 0$ e il punto $P(2, 1)$ è:

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

B Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcuni esercizi nel piano cartesiano.

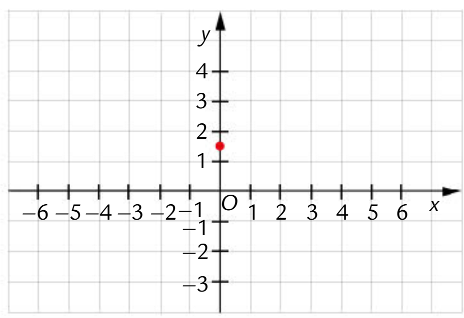
1

Passi del procedimento	**Determinare la distanza tra le seguenti coppie di punti:** $A(1, 3)$ e $B(1, -2)$	$C(8, 2)$ e $D(-1, 2)$	$E(-2, 1)$ e $F(-1, 5)$
Determina la distanza tra due punti con la formula: $\overline{AB}=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ Se i punti hanno la stessa ascissa (ordinata) basta calcolare $\lvert y_B - y_A \rvert$ ($\lvert x_B - x_A \rvert$).	La distanza tra i punti A e B, avendo la stessa ascissa, è: $\overline{AB} = \lvert y_B - y_A \rvert =$ $= \lvert ..... - ..... \rvert = ...$	La distanza tra i punti C e D, avendo la stessa ordinata, è: $\overline{CD} = \lvert x_D - x_C \rvert =$ $= \lvert ..... - ..... \rvert = ...$	La distanza tra i punti E e F è: $\overline{EF} = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} =$ $= \sqrt{[-1-(.....)]^2 + (..... - 1)^2} =$ $= \sqrt{(.....)^2 + (4)^2} = ...$

2

Passi del procedimento	**Determinare il punto medio e la misura del segmento avente i seguenti estremi:** $A(2, -1)$ e $B(0, 5)$	$C(-2, 1)$ e $D(2, 3)$
Determina le coordinate del punto medio: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$	$M\left(\frac{..........}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow M(....., ...)$	$M = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{..........}{2}\right) \Rightarrow$ $\Rightarrow M(....., ...)$
Determina la misura del segmento utilizzando la formula della distanza tra due punti.	$\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (..... - .....)^2} =$ $= \sqrt{........................} = ...$	$\overline{CD} = \sqrt{(..........)^2 + (3-1)^2} =$ $= \sqrt{..........} = 2\sqrt{..........}$

3 Completa la seguente tabella.

Studio del grafico della funzione lineare $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.	
Individua il coefficiente angolare.	$m =$ ....
Individua il termine noto.	$q =$ ....
La retta forma con l'asse x un angolo acuto od ottuso?	Dal momento che m è ...., possiamo prevedere che la retta formi con l'asse x un angolo ....
Determina le coordinate di alcuni punti della retta.	*(tabella sotto)*
Traccia un grafico compatibile con le informazioni precedenti.	
Quali sono le coordinate del punto d'intersezione della retta con l'asse x?	Per individuare l'ascissa del punto d'intersezione della retta con l'asse x devi porre $y =$ ..... nell'equazione della retta; quindi il punto cercato ha coordinate ....

x	-2	-1	0	1	2
$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	.....	$\frac{3}{2}$	.....	.....

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a determinare l'equazione di una retta con condizioni assegnate.

4

Passi del procedimento	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(1, 2)$ e parallela alla retta r: $x - y - 1 = 0$.**	**Scrivere l'equazione della retta passante per $P(-1, -3)$ e perpendicolare alla retta s: $2y - x = 14$.**
Individua il coefficiente angolare m della retta richiesta. Ricorda che due rette sono: • **parallele** $\Leftrightarrow m = m'$ • **perpendicolari** $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{m'}$	L'equazione esplicita di r è: $y =$ .... Quindi il coefficiente angolare della retta richiesta è: $m = m_r =$	L'equazione esplicita di s è: $y =$ .... Quindi il suo coefficiente angolare è: $m_s =$ .... Il coefficiente angolare m della retta richiesta è allora: $m = -\frac{1}{m_s} =$ ....
Scrivi l'equazione della retta passante per P e di coefficiente angolare m: $y - y_P = m(x - x_P)$	$y -$ ..... $=$ .....$(x -$ .....$) \Rightarrow$ $\Rightarrow y =$	$y -$ ..... $=$ ..... $(x -$ .....$) \Rightarrow$ $\Rightarrow y =$ ....

5

Passi del procedimento	**Scrivere l'equazione della retta passante per i seguenti punti:** **$A(1, 0)$ e $B(2, -1)$**	**$C(2, 1)$ e $D(4, 5)$**
Determina il coefficiente angolare m_{AB} della retta AB utilizzando la formula: $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	$m_{AB} = \frac{-1 - .....}{..... - .....} = ...$	$m_{CD} = \frac{..... - 1}{..... - .....} = ...$
Scrivi l'equazione della retta passante per A (o B) di coefficiente angolare m_{AB}.	$y -$ ..... $=$ ..... $(x -$ .....$) \Rightarrow$ $\Rightarrow y =$	$y -$ ..... $=$ ..... $(x -$ .....$) \Rightarrow$ $\Rightarrow y =$ ....

6 Completa la seguente tabella seguendo i passi indicati.

Passi del procedimento	**Stabilire se le seguenti coppie di rette sono parallele o perpendicolari:** **$y = -2x$ e $2x - 4y + 1 = 0$**	**$y = 3x$ e $6x + 2y - 1 = 0$**
Determina il coefficiente angolare m della prima retta.	La retta di equazione $y = -2x$ ha coefficiente angolare $m =$	La retta di equazione $y = 3x$ ha coefficiente angolare $m =$ .....
Determina il coefficiente angolare m' della seconda retta.	La retta di equazione $2x - 4y + 1 = 0$ ha forma esplicita $y =$ ...., quindi il suo coefficiente angolare è: $m' =$	La retta di equazione $6x + 2y - 1 = 0$ ha forma esplicita $y =$ ...., quindi il suo coefficiente angolare è: $m' =$ ....
$m = m'$?	....	....
$m \cdot m' = -1$?	....	....

7 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare la distanza tra un punto e una retta.

Passi del procedimento	**Determinare la distanza del punto $P(3, 4)$ dalla retta di equazione $3x - 4y + 5 = 0$.**
Data la retta $ax + by + c = 0$ e il punto $P(x_0, y_0)$, applica la formula: $d = \frac{\lvert ax_0 + by_0 + c\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	Sapendo che: $a = 3$ $b =$ ..... $c =$ ..... $x_0 =$ ..... $y_0 = 4$ ottieni: $d = \frac{\lvert ..... \cdot 3 + ... \cdot 4 + ...\rvert}{\sqrt{(.....)^2 + (.....)^2}} = \frac{\lvert .... \rvert}{\sqrt{..... + ...}} = \frac{2}{\sqrt{.....}} = \frac{2}{.....}$

Esercizi da svolgere

Dati i punti A e B, determina il punto medio di AB e la misura del segmento AB.

1 $A(-3, 4)$ $B(4, 4)$ $\left[\left(\frac{1}{2}, 4\right); 7\right]$

2 $A(1, -2)$ $B(1, 3)$ $\left[\left(1, \frac{1}{2}\right); 5\right]$

3 $A(-2, 1)$ $B(3, 1)$ $\left[\left(\frac{1}{2}, 1\right); 5\right]$

4 $A(-1, 3)$ $B(3, 4)$ $\left[\left(1, \frac{7}{2}\right); \sqrt{17}\right]$

5 $A(-1, -3)$ $B(-2, 1)$ $\left[\left(-\frac{3}{2}, -1\right); \sqrt{17}\right]$

Determina la distanza tra le seguenti coppie di punti.

6 $A(5,\ 0)$ $B(8,\ 0)$ [3]

7 $A(2,\ -3)$ $B(2,\ 4)$ [7]

8 $A(2,\ -2)$ $B(3,\ -2)$ [1]

9 $A(2,\ 4)$ $B(5,\ 8)$ [5]

10 $A(0,\ 3)$ $B(-1,\ 4)$ $[\sqrt{2}]$

11 $A(-3,\ 0)$ $B(0,\ -2)$ $[\sqrt{13}]$

---

12 Calcola il baricentro del triangolo di vertici $A(2,\ 1)$, $B(-1,\ 0)$ e $C(-2,\ 3)$. $\left[\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]$

13 Calcola il baricentro del triangolo di vertici $A(0,\ 0)$, $B(-4,\ -2)$ e $C(-5,\ 1)$. $\left[\left(-3, -\frac{1}{3}\right)\right]$

14 Calcola il perimetro e l'area del rettangolo di vertici:
$A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), B\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right), D\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$. [Perimetro $= 10$; Area $= 6$]

15 Calcola il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$, di vertici $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 3)$. [Perimetro $= 14$; Area $= 9$]

Determina le coordinate del punto A, simmetrico di B rispetto al punto M.

16 $B(-1,\ -3)$ $M(7,\ -4)$ $[A(15,\ -5)]$

17 $B\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{4}\right)$ $M\left(-\frac{1}{5}, \frac{7}{4}\right)$ $\left[A\left(-\frac{4}{5}, \frac{17}{4}\right)\right]$

18 $B(0, 0)$ $M(3,\ -2)$ $[A(6,\ -4)]$

19 $B(1,\ -3)$ $M(0, 1)$ $[A(-1,\ 5)]$

Risolvi i seguenti problemi.

20 Determina un punto del piano avente ascissa doppia dell'ordinata e che sia equidistante dai punti $A(0,\ 1)$ e $B(3,\ -1)$. $\left[\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{8}\right)\right]$

21 Determina un punto del piano appartenente all'asse x che sia equidistante da $P(2,\ -2)$ e dal punto medio M del segmento di estremi $A(0, 1)$ e $B(-4, 3)$. $[(0,\ 0)]$

22 Un punto del piano ha ordinata uguale al triplo dell'ascissa aumentato di 1. Scrivi le coordinate del punto utilizzando un parametro reale e determina per quali condizioni del parametro il punto appartiene al quarto quadrante. [$(k,\ 3k+1)$; il punto non appartiene mai al quarto quadrante]

Traccia il grafico delle seguenti rette dopo averne determinato le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

23 $y = -2x - 3$ $\left[(0,\ -3), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)\right]$

24 $3x - y + 1 = 0$ $\left[(0,\ 1), \left(-\frac{1}{3}, 0\right)\right]$

25 $y - 4 = 0$ $[(0,\ 4)]$

26 $2 + x = 0$ $[(-2,\ 0)]$

27 $y + x - 9 = 0$ $[(0,\ 9),\ (9,\ 0)]$

28 $y = 2x - 1$ $\left[(0,\ -1), \left(\frac{1}{2}, 0\right)\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per *P* e parallela a *r*.

29 $P(-2,0)$ $r: y=-3x$ $[y=-3x-6]$

30 $P(-2,-1)$ $r: 4x-2y-1=0$ $[y=2x+3]$

31 $P\left(3,\frac{1}{2}\right)$ $r: y=x+2$ $\left[y=x-\frac{5}{2}\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per *P* e perpendicolare a *r*.

32 $P(0,3)$ $r: y=-2x$ $\left[y=\frac{1}{2}x+3\right]$

33 $P(1,-2)$ $r: x+3y-1=0$ $[y=3x-5]$

34 $P\left(\frac{1}{2},0\right)$ $r: x+y=10$ $\left[y=x-\frac{1}{2}\right]$

Scrivi l'equazione della retta passante per i punti *A* e *B*.

35 $A(-1,0)$ $B(0,3)$ $[y=3x+3]$

36 $A(-1,-1)$ $B(3,4)$ $\left[y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}\right]$

37 $A(-4,\ 3)$ $B(2,\ 5)$ $\left[y=\frac{1}{3}x+\frac{13}{3}\right]$

Stabilisci la posizione reciproca tra le seguenti rette; se due rette sono incidenti, stabilisci se sono perpendicolari.

38 $y=10$ $x=1$ [Perpendicolari]

39 $2x+y=5$ $y=1$ [Incidenti; no]

40 $x+2y=3$ $y=-\frac{1}{2}x$ [Parallele]

41 $3x-2y-5=0$ $2x+3y-5=0$ [Incidenti; sì]

42 $3x-4y-1=0$ $6x-8y+2=0$ [Parallele]

43 $2x+3y=2$ $6x-4y-6=0$ [Coincidenti]

Ricordando che l'asse di un segmento è la retta passante per il punto medio del segmento e perpendicolare al segmento stesso, determina l'equazione dell'asse del segmento *AB*.

44 $A(0,-2)$ $B(1,1)$ $[x+3y+1=0]$

45 $A(-3,\ 0)$ $B(5,\ 6)$ $[4x+3y-13=0]$

46 $A(-1,\ -2)$ $B(3,\ -2)$ $[x=1]$

Risolvi i seguenti problemi.

47 Determina la distanza dall'origine degli assi dalla retta di equazione $3x-4y+1=0$. $\left[\frac{1}{5}\right]$

48 Determina la distanza dall'origine degli assi della retta che passa per i punti $A(0,\ 3)$ e $B(3,\ 0)$. $\left[\frac{3}{2}\sqrt{2}\right]$

49 Determina la distanza del punto $P(3,\ 6)$ dalla retta di equazione $7x-4y+3=0$. $[0]$

50 Calcola la distanza del punto $A(7,\ 8)$ dalla retta di equazione $4x+2y-3=0$. $\left[\frac{41\sqrt{5}}{10}\right]$

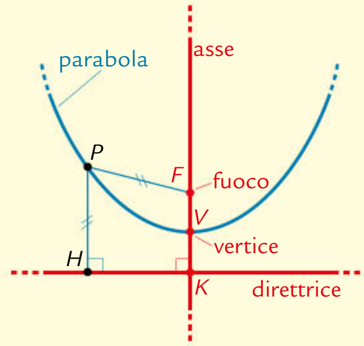
51 Traccia la retta parallela a quella di equazione $2y+\frac{1}{2}x=3$, passante per il punto $A(-5,\ 4)$, e calcola la distanza fra le due rette. $\left[\frac{5\sqrt{17}}{17}\right]$

Parabola

Sintesi visuale

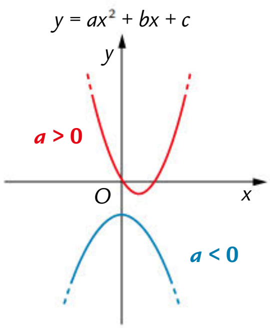
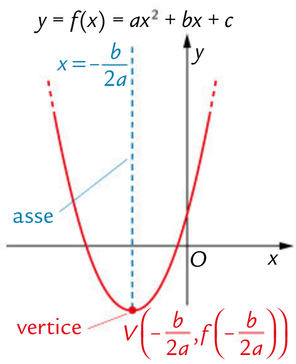
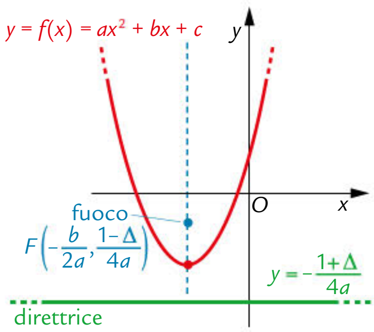
Parabola

Dati nel piano una retta d e un punto $F \notin d$, si dice **parabola** di **fuoco** F e **direttrice** d il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d.



Caratteristiche del grafico di una parabola

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$ rappresenta una **parabola** con asse parallelo all'asse y.

<table>
<tr><th>Caratteristiche del grafico</th><th>Disegno</th><th>ESEMPI</th></tr>
<tr>
<td>La concavità:
• se $a > 0$, la parabola ha la concavità rivolta verso l'alto;
• se $a < 0$, la parabola ha la concavità rivolta verso il basso.</td>
<td>
</td>
<td>• La parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ ha la concavità rivolta verso l'alto, perché $a = 1 > 0$.
• La parabola di equazione $y = -2x^2 + 1$ ha la concavità rivolta verso il basso, perché $a = -2 < 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Il vertice e l'asse di simmetria:
• il vertice ha coordinate:
$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$
In alternativa:
$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$
• l'asse di simmetria ha equazione:
$x = -\frac{b}{2a}$</td>
<td>
</td>
<td>La parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ ha vertice nel punto V di ascissa:
$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$
L'ordinata del vertice si calcola sostituendo 1 al posto di x nell'equazione della parabola:
$y_V = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4$
Il vertice è quindi $V(1, -4)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Il fuoco e la direttrice:
• il fuoco è il punto di coordinate:
$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$
dove $\Delta = b^2 - 4ac$
• la direttrice è la retta di equazione:
$y = -\frac{1+\Delta}{4a}$</td>
<td>
</td>
<td>La parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ ha il fuoco nel punto di ascissa:
$x_F = x_V = 1$
e ordinata:
$y_F = \frac{1-\Delta}{4a} =$
$= \frac{1 - [(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)]}{4 \cdot 1} = -\frac{15}{4}$
Il fuoco è quindi:
$F\left(1, -\frac{15}{4}\right)$
La direttrice è la retta di equazione:
$y = -\frac{1 + [(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)]}{4 \cdot 1} = -\frac{17}{4}$</td>
</tr>
</table>

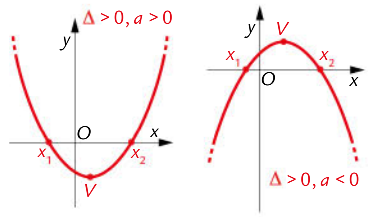
Punti d'intersezione di una parabola con l'asse *x*

Equazione associata

Data la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$, l'equazione associata $ax^2 + bx + c = 0$ fornisce le ascisse degli eventuali punti dove la parabola interseca l'asse x.

$\Delta > 0$

La parabola interseca l'asse x in due punti distinti, le cui ascisse sono le soluzioni dell'equazione.



ESEMPIO

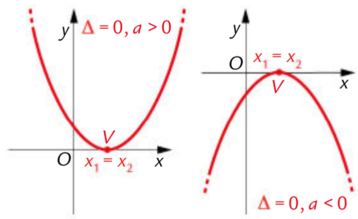
La parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 3$ interseca l'asse x in due punti distinti perché $\Delta = 16 > 0$.

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ e $x_2 = 3$.

I punti d'intersezione con l'asse x hanno coordinate $(-1, 0)$ e $(3, 0)$.

$\Delta = 0$

La parabola è tangente all'asse x in un punto la cui ascissa è la soluzione (doppia) dell'equazione.



ESEMPIO

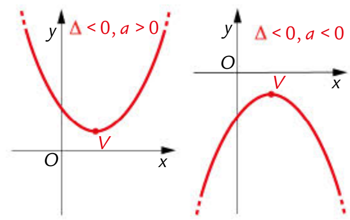
La parabola di equazione $y = x^2 - 4x + 4$ è tangente all'asse x perché $\Delta = 0$.

Poiché $x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

il punto di tangenza è $(2, 0)$.

$\Delta < 0$

La parabola **non** interseca l'asse x in alcun punto (infatti l'equazione non ha soluzioni reali).



ESEMPIO

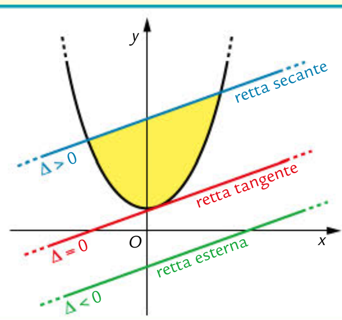
La parabola di equazione $y = x^2 + x + 1$ non interseca l'asse x perché $\Delta = -3 < 0$.

Posizioni reciproche tra una retta e una parabola

Retta e parabola

Detto Δ il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione di una parabola e quella di una retta non verticale:

- la retta è esterna alla parabola se $\Delta < 0$
- la retta è tangente alla parabola se $\Delta = 0$
- la retta è secante la parabola se $\Delta > 0$



Tangenti alla parabola passanti per il punto $P(x_0, y_0)$

P esterno alla parabola

Le tangenti sono due e i loro coefficienti angolari si determinano imponendo che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente il sistema:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

P appartenente alla parabola

La tangente è unica e il suo coefficiente angolare è dato dalla formula:

$$m = 2ax_0 + b$$

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella.

Passi del procedimento	**Determinare il vertice, l'asse di simmetria, il fuoco e la direttrice della parabola di equazione $y=-\frac{x^2}{12}-x-6$.**
Determina i coefficienti a, b, c dell'equazione della parabola.	$a=-\frac{1}{12}$, $b=\ldots$, $c=\ldots$
Determina le coordinate del vertice, ricordando che: $x_V=-\frac{b}{2a}$; $y_V=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$	$x_V=-\frac{-1}{\ldots}=\ldots$; $y_V=-\frac{x_V^2}{12}-x_V-6=-\frac{\ldots}{12}-\ldots-6=\ldots$ Quindi $V(\ldots,\ldots)$. In alternativa $y_V=-\frac{\ldots}{4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)}=\ldots$
Determina l'asse di simmetria, cioè: $x=-\frac{b}{2a}$	L'asse di simmetria è la retta di equazione $x=x_V$, cioè: $x=\ldots$
Determina le coordinate del fuoco, sapendo che: $F\left(-\frac{b}{2a},\frac{1-\Delta}{4a}\right)$	$x_F=x_V=\ldots$; $y_F=\frac{1-\ldots}{4\cdot\left(-\frac{1}{12}\right)}=\ldots$ Quindi $F(\ldots,\ldots)$.
Determina la direttrice, cioè: $y=-\frac{1+\Delta}{4a}$	La direttrice ha equazione: $y=\ldots\ldots$

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a determinare l'equazione di una parabola, con asse di simmetria parallelo all'asse y, che soddisfi le condizioni assegnate.

2

Passi del procedimento	**Determinare l'equazione della parabola avente vertice $V(1,0)$ e passante per $P(-1,4)$.**
Scrivi l'equazione della generica parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y.	$y=ax^2+bx+c$ Per trovare il valore dei tre parametri a, b e c abbiamo quindi bisogno di altrettante equazioni dipendenti da questi parametri.
Imponi il passaggio per P.	Sostituisci nella generica equazione della parabola le coordinate di P: $4=a(-1)^2+b(-1)+c\Rightarrow a-b+c=4$
Imponi il passaggio per V.	Sostituisci nella generica equazione della parabola le coordinate di V: $\ldots=a(\ldots)^2+b(\ldots)+c\Rightarrow a+b+c=0$
Imponi la condizione sull'ascissa del vertice.	La terza equazione si ottiene ricordando la formula relativa all'ascissa del vertice, ossia: $x_V=-\frac{b}{2a}=1$
Imposta il sistema formato dalle tre equazioni trovate e risolvilo.	$\begin{cases}a-b+c=4\\a+b+c=0\\-\frac{b}{2a}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=\ldots\\c=\ldots\end{cases}$
Concludi.	La parabola cercata ha quindi equazione: $y=\ldots\ldots$

3

Passi del procedimento	Determinare l'equazione della parabola passante per $A(-2, 0)$, $B(1, 1)$ e $C(0, 3)$.
Scrivi l'equazione della generica parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y.	$y = ax^2 + bx + c$ Per trovare il valore dei tre parametri a, b e c abbiamo quindi bisogno di tre equazioni dipendenti da questi parametri.
Imponi il passaggio per A, B, C.	$0 = a(-2)^2 + b(-2) + c$ $1 = a(1)^2 + b(1) + c$ $\ldots = a(\ldots)^2 + b(\ldots) + c$
Imposta e risolvi il sistema composto dalle tre equazioni.	$\begin{cases} 0 = a(-2)^2 + b(-2) + c \\ 1 = a(1)^2 + b(1) + c \\ \ldots = a(\ldots)^2 + b(\ldots) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \ldots \\ b = \ldots \\ c = 3 \end{cases}$
Concludi.	La parabola cercata ha quindi equazione $y = \ldots\ldots$

4 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare la posizione reciproca tra una retta e una parabola e a calcolare le coordinate degli eventuali punti di intersezione.

Passi del procedimento	Determinare la posizione reciproca tra la retta e la parabola di equazioni $y = -x$ e $y = 2x^2 - 4x + 1$.
Poni a sistema le equazioni della retta e della parabola.	$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x^2 - 4x + 1 \end{cases}$
Calcola l'equazione risolvente del sistema. Essendo un'equazione di secondo grado si possono verificare tre casi: • se $\Delta > 0$ ci saranno due soluzioni reali e distinte, quindi la retta è ***secante***; • se $\Delta = 0$ ci saranno due soluzioni reali e coincidenti, quindi la retta è ***tangente***; • se $\Delta < 0$ l'equazione risulta impossibile e quindi la retta è ***esterna*** alla parabola.	Utilizzando il metodo del confronto ottieni: $-x = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow \ldots\ldots = 0$ Calcola il discriminante dell'equazione risolvente: $\Delta = b^2 - 4ac = \ldots$ Il discriminante è positivo, quindi la retta è ………… la parabola.
Determina le ascisse dei punti d'intersezione tra le due curve risolvendo l'equazione trovata.	I due punti d'intersezione hanno ascissa: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \ldots$
Calcola le ordinate dei punti d'intersezione.	Sostituisci le ascisse trovate nell'equazione della retta (o della parabola): $y_1 = -x_1 = \ldots$ e $y_2 = -x_2 = \ldots$
Concludi.	La retta è ………… la parabola e i punti di intersezione tra le due curve sono $(\ldots, \ldots)$ e $(\ldots, \ldots)$.

5 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare le equazioni delle rette tangenti a una parabola passanti per un punto assegnato.

Passi del procedimento	Determinare le equazioni delle rette tangenti alla parabola $y = x^2 - 1$ passanti per il punto $P(0, -2)$.
Scrivi l'equazione della retta generica passante per il punto P.	$y - (-2) = m(x - 0) \Rightarrow y = \ldots\ldots$
Poni l'equazione della retta a sistema con l'equazione della parabola e calcola l'equazione risolvente.	$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = \ldots\ldots \end{cases} \Rightarrow x^2 - 1 = mx - 2 \Rightarrow x^2 - mx + \ldots = 0$
Imponi la condizione di tangenza, ossia $\Delta = 0$.	$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow m^2 - \ldots = 0$ $m^2 = \ldots \Rightarrow m = \pm\ldots$
Sostituisci i valori ottenuti nell'equazione della generica retta per P.	Le due rette tangenti alla parabola sono quindi: $y = +\ \ldots\ x - 2$ e $y = -\ \ldots\ x - 2$

Circonferenza ed ellisse
Sintesi visuale

Circonferenza

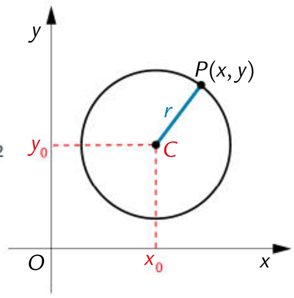
Circonferenza

Si dice circonferenza di **centro** C e **raggio** r il luogo dei punti del piano la cui distanza da C è r.

Equazione dati il centro e il raggio

L'equazione della circonferenza di centro $C(x_0, y_0)$ e raggio r è:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$



Equazione in forma normale

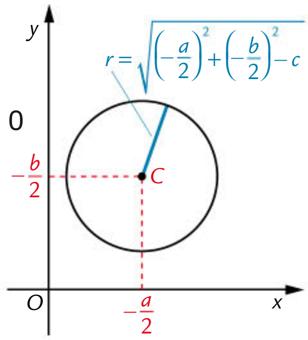
Un'equazione algebrica di secondo grado del tipo:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

con a, b e $c \in \mathbf{R}$

rappresenta una circonferenza se e solo se vale:

$a^2 + b^2 - 4c \geq 0$

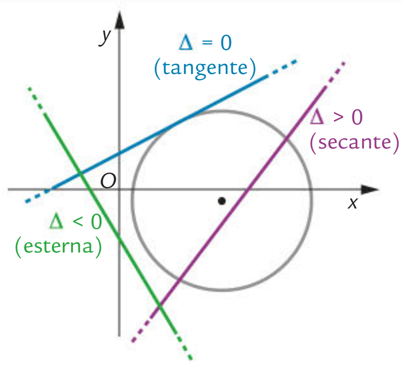


Posizioni reciproche tra una retta e una circonferenza

Retta e circonferenza

Detto Δ il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione di una circonferenza e quella di una retta:

- la retta è esterna alla circonferenza se $\Delta < 0$
- la retta è tangente alla circonferenza se $\Delta = 0$
- la retta è secante la circonferenza se $\Delta > 0$



Tangenti passanti per $P(x_0, y_0)$

Esistono se P è esterno alla circonferenza (due tangenti) o se vi appartiene (una tangente).

P è esterno alla circonferenza

Le rette tangenti si possono determinare con due metodi:

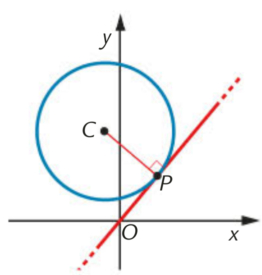
- si impone che sia nullo il discriminante dell'equazione risolvente il sistema formato dall'equazione della circonferenza e dall'equazione della generica retta passante per P;
- si impone che la distanza del centro della circonferenza dalla generica retta passante per P sia uguale al raggio.

N.B. Il secondo metodo è di solito preferibile perché richiede meno calcoli.

P appartiene alla circonferenza

La retta tangente si può determinare tramite il seguente metodo geometrico:

- si scrive l'equazione della retta passante per il punto P e perpendicolare alla retta CP.

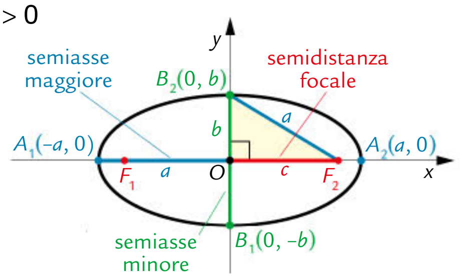
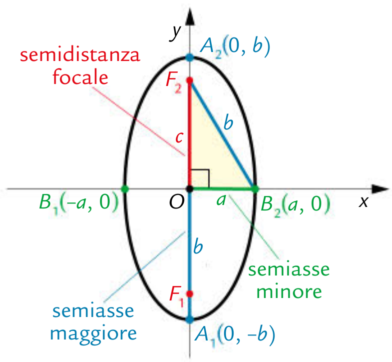


Ellisse

Ellisse

Si chiama **ellisse** il luogo dei punti del piano per cui è costante la **somma** delle distanze da due punti fissi, detti **fuochi**.

Caratteristiche di un'ellisse

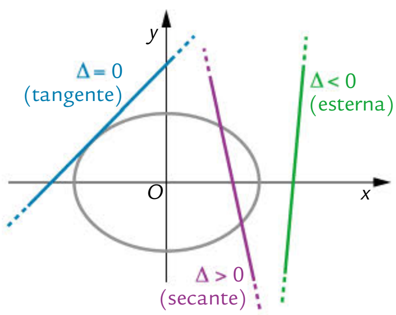
Proprietà	Equazione e grafico
• **Vertici e assi** $A_1(-a,\ 0)$; $A_2(a,\ 0)$ $\Rightarrow A_1A_2$ è l'asse maggiore $B_1(0,\ -b)$; $B_1(0,\ b)$ $\Rightarrow B_1B_2$ è l'asse minore • **Relazioni tra i parametri** $b^2+c^2=a^2 \Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}$ • **Fuochi** $\underbrace{F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right);\ F_2\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)}_{\text{appartengono all'asse } x}$ • **Eccentricità** $e=\dfrac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}=\dfrac{c}{a}$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $a>b>0$ 
• **Vertici e assi** $A_1(0,\ -b)$; $A_2(0,\ b)$ $\Rightarrow A_1A_2$ è l'asse maggiore $B_1(-a,\ 0)$; $B_1(a,\ 0)$ $\Rightarrow B_1B_2$ è l'asse minore • **Relazioni tra i parametri** $a^2+c^2=b^2 \Rightarrow c=\sqrt{b^2-a^2}$ • **Fuochi** $\underbrace{F_1\left(0,\ -\sqrt{b^2-a^2}\right);\ F_2\left(0,\ \sqrt{b^2-a^2}\right)}_{\text{appartengono all'asse } y}$ • **Eccentricità** $e=\dfrac{\text{semidistanza focale}}{\text{semiasse maggiore}}=\dfrac{c}{b}$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $0<a<b$ 

Posizioni reciproche tra una retta e un'ellisse

Retta e ellisse

Detto Δ il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra l'equazione di un'ellisse e quella di una retta:

- la retta è esterna all'ellisse se $\Delta < 0$
- la retta è tangente all'ellisse se $\Delta = 0$
- la retta è secante all'ellisse se $\Delta > 0$



Tangenti all'ellisse

Esistono se P è esterno all'ellisse (due tangenti) o se appartiene all'ellisse (una tangente).

***P* è esterno all'ellisse**

Le rette tangenti si possono determinare imponendo che sia nullo il discriminante risolvente il sistema formato dall'equazione dell'ellisse e dall'equazione della generica retta passante per P.

***P* appartiene all'ellisse**

La retta tangente all'ellisse in $P(x_0,\ y_0)$ ha equazione:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$$

Funzioni esponenziali

Sintesi visuale

Potenze con esponente razionale o irrazionale

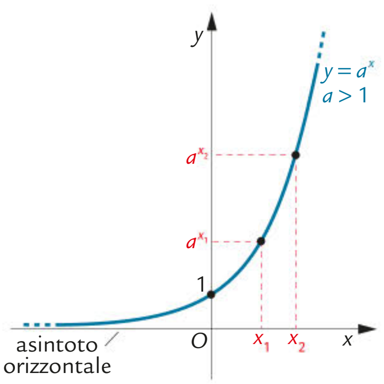
Potenza	Definizione	ESEMPI
con esponente un numero intero m non negativo	$a^0 = 1$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$, con $a \neq 0$ $a^1 = a$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$ $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots\ldots \cdot a}_{m \text{ volte}}$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$, con $m > 1$	$4^0 = 1$ $(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
con esponente un numero intero negativo	$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$, con $a \neq 0$ e $m \in \mathbf{N} - \{0\}$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$
con esponente un numero razionale non nullo	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$, con $a \geq 0$ e $m, n \in \mathbf{N} - \{0\}$ $a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}}$ $\quad \forall a \in \mathbf{R}$, con $a > 0$ e $m, n \in \mathbf{N} - \{0\}$	$2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ $5^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{25}}$
con esponente irrazionale positivo	a^m con $m \in \mathbf{R}^+ - \mathbf{Q}^+$ ha significato a condizione che $a \geq 0$.	$(x+1)^{\sqrt{3}}$ ha senso per $x \geq -1$.
con esponente irrazionale negativo	a^m con $m \in \mathbf{R}^- - \mathbf{Q}^-$ ha significato a condizione che $a > 0$.	$(x-3)^{-\sqrt{5}}$ ha senso per $x > 3$.

Funzioni esponenziali

Funzione esponenziale

Funzione di equazione $y = a^x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

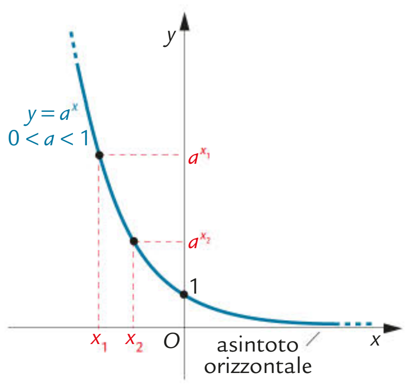
Se $a > 1$



- La funzione ha come dominio $\mathbf{R}$ e come immagine $\mathbf{R}^+$.
- Il semiasse negativo delle x è asintoto orizzontale.
- Il grafico interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$.
- La funzione è strettamente **crescente**:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

Se $0 < a < 1$



- La funzione ha come dominio $\mathbf{R}$ e come immagine $\mathbf{R}^+$.
- Il semiasse positivo delle x è asintoto orizzontale.
- Il grafico interseca l'asse y nel punto di coordinate $(0, 1)$.
- La funzione è strettamente **decrescente**:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$

Esercizi da svolgere

Scrivi le seguenti potenze sotto forma di radicale.

1 $3^{\frac{3}{2}}$

2 $5^{-\frac{1}{2}}$

3 $\left(\frac{8}{3}\right)^{-\frac{4}{3}}$

4 $4^{\frac{2}{3}}$

5 $\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$

6 $81^{-\frac{1}{3}}$

Scrivi le seguenti espressioni sotto forma di potenza con esponente razionale.

7 $\sqrt{\sqrt{2}}$

8 $\sqrt[3]{3^2}$

9 $\frac{3}{\sqrt[4]{9}}$

10 $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$

11 $\frac{\sqrt[3]{2}}{2^7}$

12 $\sqrt{\sqrt[3]{16}}$

Determina per quale valore di *x* hanno significato le seguenti potenze.

13 $(3-x)^{\sqrt{5}}$ $[x \leq 3]$

14 $(4-x^2)^{-\sqrt{5}}$ $[-2 < x < 2]$

15 $(x^2+2x+1)^{-\sqrt{5}}$ $[x \neq -1]$

16 $\left(\frac{1-x}{x+1}\right)^{\pi}$ $[-1 < x \leq 1]$

17 $\left(\frac{2-3x}{x^2+x+1}\right)^{-\sqrt{2}}$ $\left[x < \frac{2}{3}\right]$

18 $(x^3-6x^2+9x)^{-\pi}$ $[0 < x < 3 \vee x > 3]$

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando le proprietà delle potenze.

19 $3^5 \cdot 3^2$ $[3^7]$

20 $2^8 : 2^4$ $[16]$

21 $(2^5)^3 \cdot 2^{-2}$ $[2^{13}]$

22 $\left[(\sqrt{2})^3\right]^3$ $\left[2^{\frac{9}{2}}\right]$

23 $(2^7 : 2^5)^3$ $[64]$

24 $(3^2)^3 : (3^2)^2$ $[9]$

25 $(5^4 : 5^6) \cdot 5^3$ $[5]$

26 $\left(2 : 2^{1-\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ $[4]$

27 $\left[\left(3^{2-\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}+2}\right] \cdot \left(3^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ $[27]$

28 $\left[\left(5^{2\sqrt{2}} : 5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}\right]^{-1}$ $\left[\frac{1}{25}\right]$

29 $\left[\left(2^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{\sqrt{6}} : 2^3$ $[8]$

Determina per quali valori del parametro *k* le seguenti funzioni esponenziali risultano strettamente crescenti.

30 $y = (k+1)^x$ $[k > 0]$

31 $y = (2-2k)^x$ $\left[k < \frac{1}{2}\right]$

32 $y = (k^2-1)^x$ $[k < -\sqrt{2} \vee k > \sqrt{2}]$

33 $y = (k^2-k+1)^x$ $[k < 0 \vee k > 1]$

34 $y = (k^2+2)^x$ $[\forall k \in \mathbf{R}]$

Determina per quali valori del parametro *k* le seguenti funzioni esponenziali risultano strettamente decrescenti.

35 $y = (k+1)^x$ $[-1 < k < 0]$

36 $y = (k^2+1)^x$ $[\nexists k \in \mathbf{R}]$

37 $y = (2-3k)^x$ $\left[\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}\right]$

38 $y = (k^2-3)^x$ $[-2 < k < -\sqrt{3} \vee \sqrt{3} < k < 2]$

Equazioni esponenziali

Equazione esponenziale

Un'equazione si dice esponenziale quando l'incognita compare nell'esponente di almeno una potenza.

Equazioni esponenziali elementari

$a^x = b$ con $a > 0$ e $a \neq 1$:
- se $b > 0$ ammette un'unica soluzione;
- se $b \leq 0$ è impossibile.

ESEMPI
- $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$ ha come unica soluzione $x = -2$
- $5^x = 0$ è impossibile
- $3^x = -1$ è impossibile

Equazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ è equivalente all'equazione: $f(x) = g(x)$

ESEMPI
- $2^{2x-1} = 8 \Rightarrow 2^{2x-1} = 2^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$
- $25^x = 5\sqrt{5} \Rightarrow 5^{2x} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Disequazioni esponenziali

Disequazione esponenziale

Una disequazione si dice esponenziale quando l'incognita compare nell'esponente di almeno una potenza.

Disequazioni esponenziali elementari

$a^x > b$ e b si può riscrivere come potenza di a:
- se $b > 0$ e $0 < a < 1$ equivale a una disequazione di verso opposto tra gli esponenti;
- se $b > 0$ e $a > 1$ equivale a una disequazione dello stesso verso tra gli esponenti;
- se $b \leq 0$ è impossibile o sempre verificata.

Con analoghi ragionamenti si risolvono le disequazioni in cui compare un simbolo diverso da >.

ESEMPIO

$\left(\frac{1}{2}\right)^x < 16 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x > -4$

Disequazioni riconducibili alla forma $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

La disequazione $a^{f(x)} > a^{g(x)}$:
- se $0 < a < 1$ equivale a $f(x) < g(x)$;
- se $a > 1$ equivale a $f(x) > g(x)$.

Con analoghi ragionamenti si risolvono le disequazioni in cui compare un simbolo diverso da >.

ESEMPI
- $2^{3x-1} > 4^x\sqrt{2} \Rightarrow 2^{3x-1} > 2^{2x+\frac{1}{2}} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 3x - 1 > 2x + \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{3}{2}$
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} < \frac{3^x}{9} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 2x - 1 > 2 - x \Rightarrow x > 1$

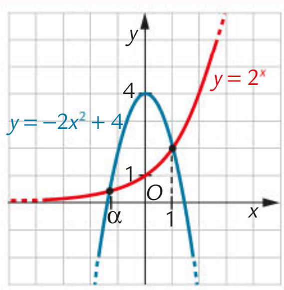
Interpretazione grafica

Se l'equazione (disequazione) presenta sia termini esponenziali sia termini algebrici la si può interpretare graficamente, in modo da stabilire se ammette soluzioni e, in caso affermativo, "localizzare" le soluzioni (gli intervalli dove è verificata).

ESEMPIO

Risolviamo la disequazione $2^x + 2x^2 - 4 > 0$.
La disequazione è equivalente a $2^x > -2x^2 + 4$.
Le soluzioni si possono interpretare come le ascisse dei punti in cui il grafico della funzione $y = 2^x$ è al di sopra della parabola $y = -2x^2 + 4$. Dalla figura possiamo vedere che la disequazione è soddisfatta per:

$$x < \alpha \vee x > 1 \text{ con } -2 < \alpha < -1$$



Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcune equazioni esponenziali.

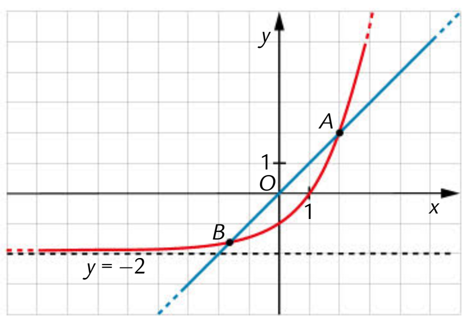
1

Passi del procedimento	**Risolvere l'equazione $5^x \cdot 25^{x-1} = \sqrt{5^{-x}}$.**
Riconduci l'equazione alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.	$5^x \cdot 25^{x-1} = \sqrt{5^{-x}}$ Equazione data $5^x \cdot (5^2)^{x-1} = (5^{-x})^{\dots}$ Ricordando la definizione di potenza con esponente razionale $5^x \cdot 5^{2(x-1)} = 5^{\dots}$ Proprietà della potenza di una potenza $5^{x \dots 2(x-1)} = 5^{\dots}$ Proprietà delle potenze relativa al prodotto di potenze con la stessa base
Passa all'uguaglianza tra gli esponenti e risolvi l'equazione $f(x) = g(x)$.	Uguaglia gli esponenti dell'equazione: $x \dots 2(x-1) = \dots \Rightarrow x \dots 2x - 2 = \dots \Rightarrow \dots$
Concludi.	La soluzione è $x = \dots$

2

Passi del procedimento	**Risolvere l'equazione $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.**
Poni $t = 2^x$.	Si ha $t^2 = 2^{\dots}$ e quindi l'equazione diventa: $\dots - 3t - 4 = 0$
Risolvi l'equazione di secondo grado nell'incognita t.	$\dots - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t - \dots)(t + \dots) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow t = -1 \vee t = \dots$
Rimpiazza 2^x a t e risolvi le due equazioni ottenute.	Ottieni $2^x = -1 \vee 2^x = \dots$ • $2^x = -1 \Rightarrow$ l'equazione è .... • $2^x = \dots \Rightarrow x = \dots$
Concludi.	La soluzione è $x = \dots$

3 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere graficamente un'equazione esponenziale.

Passi del procedimento	**Interpretando graficamente la seguente equazione, stabilire il numero delle sue soluzioni e, per ciascuna soluzione, determinare un intervallo di lunghezza unitaria cui essa appartiene:** $2^x - 2 = x$
Rappresenta il grafico della funzione esponenziale $y = 2^x - 2$ e della retta $y = x$.	Tracciamo il grafico delle funzioni $y = 2^x - 2$ e $y = x$: 
Le soluzioni dell'equazione sono le ascisse dei punti d'intersezione dei due grafici.	Come puoi osservare l'equazione ha due soluzioni: • una è positiva e, come puoi facilmente verificare anche per via algebrica, corrisponde a $x = \dots$; • l'altra è un numero .... compreso tra ..... e .....
Concludi.	Le soluzioni sono ....

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcune disequazioni esponenziali.

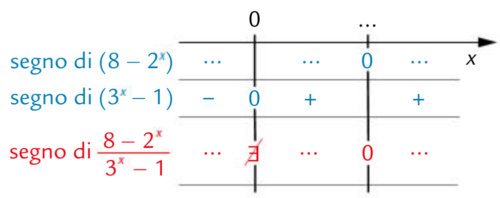
4

Passi del procedimento	**Risolvere la disequazione** $\left(\frac{4}{9}\right)^{3x-1} < \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.
Riconduci la disequazione alla forma $a^{f(x)} < a^{g(x)}$.	$\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{.....}\right)^{3x-1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{.....}$ Ricordando la definizione di potenza con esponente razionale $\left(\frac{2}{3}\right)^{.....(3x-1)} < \left(\frac{2}{3}\right)^{.....}$ Proprietà della potenza di una potenza
La disequazione ottenuta è equivalente a una disequazione tra gli esponenti: • con lo stesso verso se $a > 1$; • con verso contrario se $0 < a < 1$. Risolvi quindi $f(x) > g(x)$.	Risolvi la disequazione tra gli esponenti ricordandoti di cambiare il verso perché $\frac{2}{3} <$ .....: $.....(3x-1) > ..... \Rightarrow$ ....
Concludi.	L'insieme delle soluzioni della disequazione è $x >$ .....

5

Passi del procedimento	**Risolvere la disequazione** $2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 8 < 0$.
Poni $t = 2^x$.	Si ha $t^2 = 2^{.....}$ e quindi la disequazione diventa: $..... - 9t + 8 < 0$
Risolvi la disequazione di secondo grado nell'incognita t.	$..... - 9t + 8 < 0 \Rightarrow (t - .....)(t - .....) < 0 \Rightarrow 1 < t < .....$
Rimpiazza 2^x a t e risolvi le disequazioni ottenute.	Ottieni $1 < 2^x < .....$, cioè $2^0 < 2^x < 2^{.....}$ Passando alla disequazione tra gli esponenti si ha la soluzione della disequazione originaria: $0 < x < .....$
Concludi.	L'insieme delle soluzioni della disequazione è $0 < x <$ .....

6 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a risolvere una disequazione esponenziale frazionaria.

Passi del procedimento	**Risolvere la seguente disequazione frazionaria:** $\frac{8 - 2^x}{3^x - 1} \leq 0$
Studia il segno del numeratore e del denominatore, andando a cercare quando sono positivi.	• Segno del numeratore: $8 - 2^x > 0 \Rightarrow$ .... • Segno del denominatore: $3^x - 1 > 0 \Rightarrow$ ....
Costruisci la tabella dei segni per determinare le soluzioni della disequazione frazionaria.	
Concludi.	La disequazione è soddisfatta quando la frazione è negativa o nulla, quindi le soluzioni sono .... ∨ ....

Esercizi da svolgere

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali riconducibili alla forma $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

1 $3^x = 9$ $[2]$

2 $2^x = \frac{1}{8}$ $[-3]$

3 $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 1$ $[0]$

4 $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 0$ [Impossibile]

5 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{16}$ $[4]$

6 $6^x = \sqrt[3]{6}$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

7 $2^{x+4} = 32$ $[1]$

8 $3^{x+2} = \frac{1}{9}$ $[-4]$

9 $2^{x+2} = \sqrt{2}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

10 $4^x - 2^{x+3} = 0$ $[3]$

11 $0{,}125 \cdot 2^x = \sqrt{2}$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

12 $2^{x+3} = \frac{16}{2^{x-2}}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

13 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-7} = \frac{4}{9}$ $[\pm 3]$

14 $\frac{\sqrt[3]{3^x}}{9} = (3^{2x-1})^{\frac{1}{3}}$ $[-5]$

15 $\frac{2^{x+1} \cdot 4^x}{8} = (2^{\frac{1}{3}})^x$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

16 $\frac{8}{\sqrt{4^x} \cdot 2^{1-2x}} = 1$ $[-2]$

17 $\sqrt{5^x} \cdot \sqrt[3]{25^x} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\left[-\frac{3}{7}\right]$

18 $2^{2x-3} = \frac{1}{\sqrt{2^{x+1}}}$ $[1]$

19 $5^{x^2-3x} \cdot 5^{x-2} = -5$ [Impossibile]

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali eseguendo opportune sostituzioni.

20 $3^{x+1} - 3^{x+2} + 18 = 0$ $[1]$

21 $3 \cdot 2^x - 8 \cdot 2^{x-2} = 1$ $[0]$

22 $5^{x-1} + 24 = 5^{x+1}$ $[1]$

23 $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ $[0, 1]$

24 $3^{2x} - 3^x = 6$ $[1]$

25 $5^{2x} - 5^{x+2} + 5^{x+1} - 125 = 0$ $[2]$

26 $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$ $[3]$

27 $2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ $[3]$

28 $2^{x+1} + 2^{-x} = 3$ $[-1, 0]$

29 $3^{x+1} + \frac{2}{3^x} = 3^{1-x}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

Interpretando graficamente le seguenti equazioni, stabilisci il numero delle loro soluzioni e, per ciascuna soluzione, determina un intervallo di lunghezza unitaria cui essa appartiene.

30 $2^x - 1 = 1 - x$ [1 soluzione compresa fra 0 e 1]

31 $2 - 3^x = -x$ [$x = 1$ e 1 soluzione compresa fra -2 e -1]

32 $|2^x - 1| = \frac{1}{2}$ [$x = -1$ e 1 soluzione compresa fra 0 e 1]

33 $3^x + 2 = 4 - x^2$ [1 soluzione compresa fra -2 e -1 e 1 soluzione compresa fra 0 e 1]

34 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 - x^2$ [$x = 0$ e 1 soluzione compresa fra 0 e 1]

35 $2^x = \frac{2}{x}$ [$x = 1$]

36 $2^x - 2 = \frac{1}{x}$ [1 soluzione compresa fra -1 e 0 e 1 soluzione compresa fra 1 e 2]

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali riconducendoti a disuguaglianze tra potenze aventi la stessa base.

37 $3^x > 81$ $[x > 4]$

38 $8^{2x} \leq 4$ $\left[x \leq \frac{1}{3}\right]$

39 $\left(\frac{1}{6}\right)^x < 1$ $[x > 0]$

40 $\left(\frac{1}{3}\right)^x < \frac{1}{27}$ $[x > 3]$

41 $2^{x-2} > 16$ $[x > 6]$

42 $\left(\frac{2}{3}\right)^x < 0$ [Impossibile]

43 $(9^x)^2 \geq \frac{1}{3^x}$ $[x \geq 0]$

44 $7^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt{7} < \frac{1}{7^{2x+1}}$ $\left[x < -\frac{3}{5}\right]$

45 $5^x \cdot 5^{2x} \leq \sqrt{\frac{1}{5}}$ $\left[x \leq -\frac{1}{6}\right]$

46 $\sqrt{3} \geq 9^{x+1}$ $\left[x \leq -\frac{3}{4}\right]$

47 $\sqrt{2^x} < 4^{x-1}$ $\left[x > \frac{4}{3}\right]$

48 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} > \left(\frac{5}{2}\right)^{2x+4}$ $[x < -2]$

49 $4^{x+1} \cdot 2^{x+1} \leq \frac{1}{8}$ $[x \leq -2]$

50 $\sqrt[3]{3^x} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{27^x}}$ $\left[x < \frac{3}{11}\right]$

51 $2^{x+4} - 32 \geq 0$ $[x \geq 1]$

52 $9^{3x} - 9^{x+1} < 0$ $\left[x < \frac{1}{2}\right]$

53 $3^{x^2+5x-6} > 1$ $[x < -6 \vee x > 1]$

54 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-3x} < 16$ $[x < 1 \vee x > 2]$

55 $8^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}$ $\left[x \geq \frac{3}{2}\right]$

56 $\sqrt[3]{\frac{1}{2^{x+1}}} \geq 4^{x-1}$ $\left[x \leq \frac{5}{7}\right]$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali eseguendo opportune sostituzioni.

57 $3^{x-1} + 3^x < 4$ $[x < 1]$

58 $2^{x+1} + 2^{x+2} > 3$ $[x > -1]$

59 $7^{2x} - 8 \cdot 7^x + 7 > 0$ $[x < 0 \vee x > 1]$

60 $5^{2x+2} - 26 \cdot 5^x + 25 \leq 0$ [Impossibile]

61 $4^x + 2^x - 2 > 0$ $[x > 0]$

62 $3^{2x} - 28 \cdot 3^x + 27 > 0$ $[x < 0 \vee x > 3]$

63 $e^{2x} + e^x - 2 \leq 0$ $[x \leq 0]$

64 $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2 < 0$ $[x > 0]$

65 $4^x - 17 \cdot 2^x + 16 \geq 0$ $[x \leq 0 \vee x \geq 4]$

66 $2^{3x+1} + 15 \cdot 2^{2x} - 8 \cdot 2^x \geq 0$ $[x \geq -1]$

Risolvi le seguenti disequazioni frazionarie.

67 $\frac{\sqrt{2^x} - 2}{5^x + 1} > 0$ $[x > 2]$

68 $\frac{1 - 7^{x+1}}{5^x - 0{,}04} \geq 0$ $[-2 < x \leq -1]$

69 $\frac{2^{3x-1} - 4}{\sqrt{6} - 6^x} < 0$ $\left[x < \frac{1}{2} \vee x > 1\right]$

70 $\frac{1 - 2^{\frac{x^2-x}{x+1}}}{10^x - 0{,}001} > 0$ $[-3 < x < -1 \vee 0 < x < 1]$

71 $\frac{x - 2}{4^x - 3 \cdot 2^x + 2} \leq 0$ $[x < 0 \vee 1 < x \leq 2]$

72 $\frac{5^{x+2} + 25^{x+1} - 750}{2 - |x|} > 0$ $[x < -2 \vee 1 < x < 2]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

73 $\begin{cases} 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \\ (0{,}1)^x \leq 100 \end{cases}$ $[-2 \leq x < 0 \vee x > 1]$

74 $\begin{cases} 2^{x+1} + \frac{8}{2^x} - 17 \geq 0 \\ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x < \frac{1}{9} \end{cases}$ $[x > 4]$

75 $\begin{cases} \frac{2^x - 1}{8 - 2^x} < 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x < 0{,}5 \end{cases}$ $[x > 3]$

76 $\begin{cases} (2^x - 1)(3 - 3^x) > 0 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^x - 2^x \leq 1 \end{cases}$ $[0 < x < 1]$

Problemi e modelli

77 Una colonia è composta inizialmente da 100 batteri. L'evoluzione della popolazione di batteri è descritta dalla funzione $y = 20 \cdot (2^t + 2^{t+2})$, dove y è il numero di batteri presenti nella colonia dopo t ore dall'istante iniziale. Dopo quanto tempo i batteri presenti nella colonia saranno 400? [2 ore]

Funzioni logaritmiche

Sintesi visuale

Logaritmo

$\underbrace{x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b}_{\text{il logaritmo in base } a \text{ di } b \text{ è l'esponente da dare ad } a \text{ per ottenere } b}$ con $\underbrace{a}_{\text{base del logaritmo}} > 0$ e $a \neq 1$ e $\underbrace{b}_{\text{argomento del logaritmo}} > 0$

ESEMPI

$\log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$; $\log_7 1 = 0$ perché $7^0 = 1$

Proprietà dei logaritmi

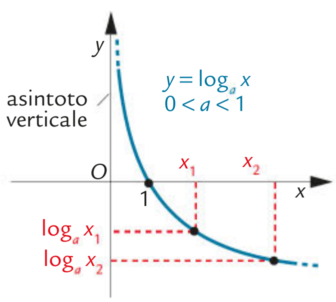
Proprietà	In simboli	ESEMPI
Logaritmo di un prodotto	$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \quad \forall b \in \mathbf{R}^+, c \in \mathbf{R}^+$	$\log_2 20 = \log_2(4 \cdot 5) = \log_2 4 + \log_2 5 = 2 + \log_2 5$
Logaritmo di una potenza	$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b \quad \forall b \in \mathbf{R}^+, c \in \mathbf{R}$	$\log_2 9 = \log_2 3^2 = 2 \log_2 3$
Logaritmo di un quoziente	$\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad \forall b \in \mathbf{R}^+, c \in \mathbf{R}^+$	$\log_3 \dfrac{7}{3} = \log_3 7 - \log_3 3 = \log_3 7 - 1$
Cambiamento di base	$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad \forall a, b, c \in \mathbf{R}^+, a \neq 1, c \neq 1$	$\log_5 3 = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}$

Funzioni logaritmiche

Funzione logaritmica

Funzione di equazione $y = \log_a x$, con $a > 0$ e $a \neq 1$.

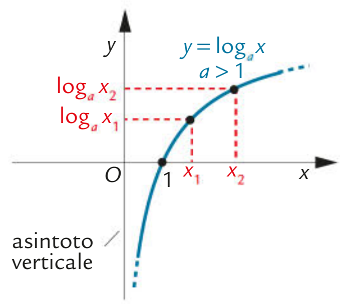
Se $0 < a < 1$



- La funzione ha come dominio $\mathbf{R}^+$ e come immagine $\mathbf{R}$.
- Il semiasse positivo delle y è asintoto verticale.
- Il grafico interseca l'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$.
- La funzione è strettamente **decrescente**:

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$

Se $a > 1$



- La funzione ha come dominio $\mathbf{R}^+$ e come immagine $\mathbf{R}$.
- Il semiasse negativo delle y è asintoto verticale.
- Il grafico interseca l'asse x nel punto di coordinate $(1, 0)$.
- La funzione è strettamente **crescente**:

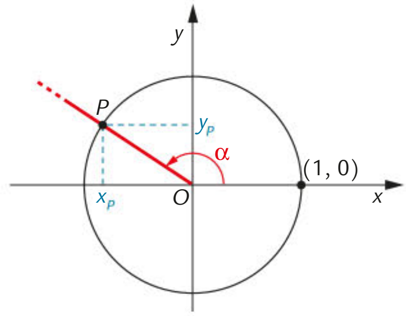
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2 \ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$

Sintesi visuale

Funzioni goniometriche

Dato un angolo α in posizione normale e indicato *P* il punto d'intersezione del secondo lato dell'angolo con la circonferenza goniometrica, chiamiamo:

- **seno** di α l'ordinata di *P*;
- **coseno** di α l'ascissa di *P*;
- **tangente** di α il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di *P*.



Funzioni goniometriche di angoli notevoli

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Relazioni tra seno, coseno e tangente

Relazioni fondamentali

Prima relazione fondamentale:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Seconda relazione fondamentale:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Conseguenze

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

ESEMPIO

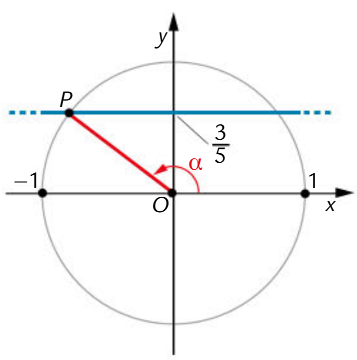
Sapendo che $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ si ha:

$$\cos\alpha < 0 \text{ e } \tan\alpha < 0$$

Quindi:

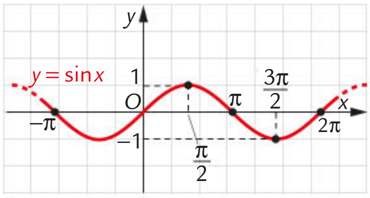
$$\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$



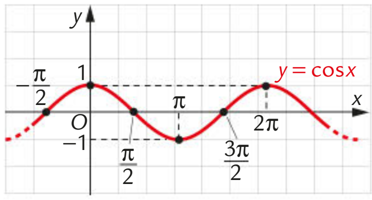
Grafici delle funzioni goniometriche

Funzione seno



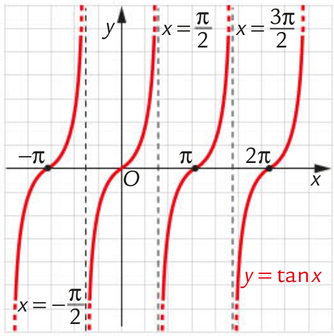
- Il dominio è **R**;
- è periodica di periodo 2π;
- interseca l'asse x in infiniti punti di ascissa $x = k\pi$;
- è dispari;
- ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$;
- ha massimo in tutti i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e minimo in tutti i punti di ascissa $x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$.

Funzione coseno



- Il dominio è **R**;
- è periodica di periodo 2π;
- interseca l'asse x in infiniti punti di ascissa $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;
- è pari;
- ha come immagine l'intervallo $[-1, 1]$;
- ha massimo in tutti i punti di ascissa $x = 2k\pi$ e minimo in tutti i punti di ascissa $x = \pi + 2k\pi$.

Funzione tangente



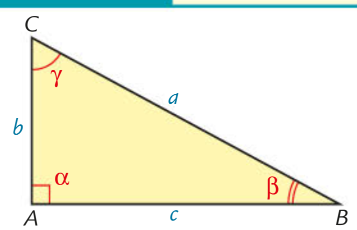
- Il dominio è $\mathbf{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$;
- è periodica di periodo π;
- interseca l'asse x in infiniti punti di ascissa $x = k\pi$;
- è dispari;
- ha come immagine **R**;
- ha infiniti asintoti verticali di equazioni $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Teoremi sui triangoli rettangoli

Primo teorema

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto o per il coseno dell'angolo acuto adiacente al cateto.

In formule

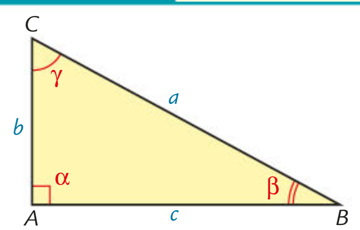


$b = a \cdot \sin\beta$ o $b = a \cdot \cos\gamma$
$c = a \cdot \sin\gamma$ o $c = a \cdot \cos\beta$

Secondo teorema

In un triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto o per la cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto.

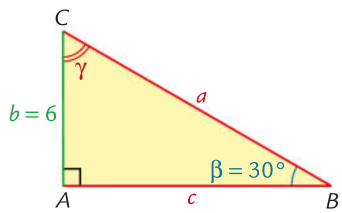
In formule



$b = c \cdot \tan\beta$ o $b = c \cdot \cot\gamma$
$c = b \cdot \tan\gamma$ o $c = b \cdot \cot\beta$

ESEMPIO

Risolviamo un triangolo rettangolo sapendo che $b = 6$ e $\beta = 30°$.



Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari quindi:

$$\gamma = 90° - 30° = 60°$$

Ricaviamo c utilizzando il secondo teorema:

$$c = b \tan\gamma = 6\sqrt{3}$$

Determiniamo a mediante il primo teorema:

$$b = a \sin 30° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{\sin 30°} = 12$$

Lezione
15 B Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a convertire le misure di angoli.

1

Passi del procedimento	**Convertire:** **la misura di 12°42′58″** **in gradi decimali**	**Convertire:** **la misura di 14,352°** **in gradi, primi e secondi**
Per convertire i gradi, primi e secondi in gradi decimali (o viceversa) ricorda che: $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ e $1'' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$ [1] $1^\circ = 60'$ e $1' = 60''$ [2]	$12^\circ 42' 58'' =$ $= 12^\circ + 42' + 58'' =$ $= 12^\circ + 42 \cdot \left(\frac{1}{60}\right)^\circ + 58 \cdot (\ldots\ldots\ldots)^\circ \simeq$ per la [1] $\simeq 12^\circ + 0,\ldots^\circ + \ldots\ldots^\circ =$ approssimando con la calcolatrice $= 12,\ldots^\circ$	$14,352^\circ = 14^\circ + 0,352^\circ =$ $= 14^\circ + 0,352 \cdot \ldots =$ per la [2] $= 14^\circ + 21,\ldots' = 14^\circ + 21' + 0,\ldots' =$ $= 14^\circ + 21' + 0,\ldots \cdot 60'' =$ per la [2] $= 14^\circ + 21' + \ldots'' =$ $\simeq 14^\circ 21' \ldots''$ approssimando con la calcolatrice

2

Passi del procedimento	**Convertire:** **la misura di 105° in radianti**	**Convertire:** **la misura di $\frac{\pi}{15}$ radianti in gradi**
Per convertire le misure degli angoli in radianti o gradi ricorda che: $\alpha_{rad} = \alpha^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ}$ [3] $\alpha^\circ = \alpha_{rad} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}$ [4]	$105^\circ =$ angolo in gradi $= 105^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} =$ per la [3] $= \frac{\ldots}{12}\pi$ angolo in radianti	$\frac{\pi}{15} =$ angolo in radianti $= \frac{\pi}{15} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} =$ per la [4] $= \ldots\ldots^\circ$ angolo in gradi

3 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a semplificare espressioni contenenti funzioni goniometriche di angoli notevoli.

<table>
<tr>
<th>Passi del procedimento</th>
<th>Semplificare le seguenti espressioni:
a. $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$
b. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}$</th>
</tr>
<tr>
<td>Ricorda i valori noti delle funzioni goniometriche relativi agli angoli notevoli:
<table>
<tr><th>α</th><th>$\sin\alpha$</th><th>$\cos\alpha$</th><th>$\tan\alpha$</th></tr>
<tr><td>0°</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>30°</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{3}$</td></tr>
<tr><td>45°</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>60°</td><td>$\frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>90°</td><td>1</td><td>0</td><td>ND</td></tr>
</table>
</td>
<td>Dopo aver opportunamente convertito le misure da radianti a gradi, ossia $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$, $\frac{\pi}{4} = \ldots^\circ$ e $\frac{\pi}{3} = \ldots^\circ$, utilizza i valori noti della tabella accanto ottenendo:
a. $\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} \cdot \frac{\ldots}{\ldots} - \sqrt{3} \cdot \ldots = \ldots$
b. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} =$
$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ldots - \ldots \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} = \ldots$</td>
</tr>
</table>

Lezione 16 A

Interesse e montante

Sintesi visuale

Interesse e tasso di interesse

Interesse, capitale e montante

Si chiama **interesse**, e si indica con la lettera I, il compenso che il creditore richiede per accordare il prestito. Il denaro che genera l'interesse viene chiamato **capitale** e si indica con la lettera C. La somma di capitale e interesse viene definita **montante** e si indica con la lettera M. In simboli:

$$\underbrace{M}_{\text{Montante}} = \underbrace{C}_{\text{Capitale}} + \underbrace{I}_{\text{Interesse}}$$

Tasso di interesse

L'interesse maturato per ogni unità di capitale in una unità di tempo; si indica con la lettera i. In simboli:

$$i = \frac{I}{C}$$

Il tasso di interesse viene solitamente dato in forma percentuale.

ESEMPIO

Se in un anno un capitale $C = 3000$ euro ha fruttato un interesse $I = 150$ euro, il tasso di interesse annuo i è uguale a:

$$i = \frac{150}{3000} = 0{,}05 = 5\%$$

Regime di capitalizzazione semplice

Regime di capitalizzazione semplice

Quando l'interesse I è direttamente proporzionale al capitale C e al tempo t, secondo la costante di proporzionalità espressa al tasso d'interesse i; in simboli:

$$I = Cit$$

Ne segue che:

$$M = C(1 + it)$$

Il fattore $(1 + it)$ è detto *fattore di capitalizzazione semplice*.

ESEMPIO

Un capitale di 10 000 euro viene investito al tasso annuo semplice del 5,5% per due anni. Determiniamo l'interesse e il montante.

Osserviamo che:

$$C = 10\,000 \text{ euro} \quad i = 5{,}5\% = 0{,}055 \quad t = 2 \text{ anni}$$

Dunque:

$$I = Cit = 10\,000 \cdot 0{,}055 \cdot 2 = 1100 \text{ euro}$$

$$M = C(1 + it) = 10\,000(1 + 0{,}055 \cdot 2) = 11\,100 \text{ euro}$$

Regime di capitalizzazione composta

Regime di capitalizzazione composta

Quando gli interessi maturati vengono reinvestiti in modo da generare a loro volta interessi.

Montante per tempi interi

Il montante M generato dal capitale C in un tempo di t anni al tasso composto i è:

$$M = C(1 + i)^t$$

Il fattore $(1 + i)^t$ è detto *fattore di capitalizzazione composta*.

ESEMPIO

Un capitale di 16 000 euro viene investito per 8 anni al tasso annuo composto del 7%.

Quindi il montante è:

$$M = C(1 + i)^t = 16\,000(1 + 0{,}07)^8 \simeq$$
$$\simeq 27\,490{,}98 \text{ euro}$$

Ne segue che:

$$I = M - C = 27\,490{,}98 - 16\,000 =$$
$$= 11\,490{,}98 \text{ euro}$$

Montante per tempi non interi

Il montante M generato in un tempo di n anni più una frazione propria f di anno al tasso composto i (nella convenzione esponenziale) è:

$$M = C(1 + i)^{n+f}$$

ESEMPIO

Un capitale di 35 000 euro viene investito al tasso annuo composto del 4,5% per 4 anni e 9 mesi. Trasformiamo il tempo in anni:

$$4 \text{ anni e } 9 \text{ mesi} = \left(\underbrace{4}_{n} + \underbrace{\frac{9}{12}}_{f}\right) \text{anni} = \frac{19}{4} \text{ anni}$$

Quindi il montante è:

$$M = C(1 + i)^{n+f} = 35\,000(1 + 0{,}045)^{\frac{19}{4}} \simeq$$
$$\simeq 43\,139{,}03 \text{ euro}$$

Tassi equivalenti

Capitalizzazione frazionata

Quando la capitalizzazione avviene in frazioni dell'anno, per esempio ogni semestre o trimestre.

In questi casi viene assegnato il tasso di *interesse annuo convertibile k* volte all'anno che viene indicato con il simbolo j_k. Indicato con i_k il tasso periodale (cioè il tasso riferito alla frazione di anno in cui avviene la capitalizzazione), vale la relazione:

$$i_k = \frac{j_k}{k}$$

ESEMPIO

Un capitale di 1000 euro viene investito per 2 anni e 3 mesi al tasso di interesse annuo convertibile del 4% capitalizzato trimestralmente.

Poiché in un anno ci sono 4 trimestri, il tasso di interesse periodale è $i_4 = \frac{4\%}{4} = 1\%$.

Convertiamo il tempo in trimestri:

2 anni e 3 mesi = $2 \cdot 4 + 1 = 9$ trimestri

Quindi $M = 1000 \cdot (1 + 0{,}01)^9 \simeq 1093{,}7$ euro

Tassi equivalenti

Se, in un dato regime finanziario, due tassi di interesse applicati allo stesso capitale e per lo stesso tempo, producono montanti uguali.

Regime di interesse semplice

In questo regime gli interessi non generano interessi, quindi il tasso periodale equivalente al tasso annuo i è $i_k = \frac{i}{k}$.

Regime di interesse composto

Dato il tasso di interesse annuo i, l'equivalente tasso periodale è $i_k = \sqrt[k]{1 + i} - 1$.

Dato il tasso periodale i_k, l'equivalente tasso annuo è $i = (1 + i_k)^k - 1$.

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a trasformare il tempo in anni.

Passi del procedimento	**Trasformare i seguenti tempi in anni (secondo la convenzione dell'anno commerciale):** **a. 2 anni e 3 mesi;** **b. 1 anno, 2 mesi e 6 giorni;** **c. 3 anni, 4 mesi e 10 giorni;** **d. 2 anni, 3 mesi e 12 giorni.**
Per determinare il tempo in anni utilizziamo la convenzione dell'anno commerciale in base alla quale un anno viene considerato formato da 12 mesi di 30 giorni ciascuno.	Determina il tempo in anni: **a.** 2 anni e 3 mesi $= \left(2 + \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{mesi in un anno}}\right) = \frac{\ldots}{4}$ anni **b.** 1 anno, 2 mesi e 6 giorni $= \left(1 + \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{mesi in un anno}} + \ldots \cdot \underbrace{\frac{1}{360}}_{\text{giorni in un anno}}\right) = \ldots$ anni **c.** 3 anni, 4 mesi e 10 giorni $= \left(3 + \ldots \cdot \frac{1}{12} + \ldots \cdot \frac{1}{360}\right) = \ldots$ anni **d.** 2 anni, 3 mesi e 12 giorni $= \left(\ldots + \ldots \cdot \frac{1}{12} + \ldots \cdot \frac{1}{360}\right) = \ldots$ anni

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere problemi sul regime di capitalizzazione semplice.

2

Passi del procedimento	**Un capitale di 14 000 euro viene investito al tasso annuo semplice del 4% per 3 anni, 4 mesi e 15 giorni.** **a. Determinare l'interesse;** **b. determinare il montante.** **Supponendo poi che alle stesse condizioni di tasso e di tempo un capitale generi un montante di 21 000 euro:** **c. determinare il capitale iniziale;** **d. determinare l'interesse.**
Determina il tempo in anni utilizzando la convenzione dell'anno commerciale.	Determina il tempo in anni: $t = 3$ anni, 4 mesi e 15 giorni $= \left(3 + \frac{4}{\ldots} + \frac{15}{\ldots}\right) = \ldots$ anni
Determina l'interesse con la formula: $I = Cit$	**a.** Determina l'interesse: $I = Cit = 14\,000 \cdot 0{,}04 \cdot \ldots = \ldots$ euro
Determina il montante sommando tra loro il capitale e l'interesse.	**b.** Determina il montante: $M = C + I = 14\,000 + \ldots = \ldots$ euro
Conoscendo il montante, determina il capitale utilizzando la formula inversa della legge di capitalizzazione semplice, ossia: $C = \frac{M}{1 + it}$	**c.** Determina il capitale: $C = \frac{M}{1 + it} = \frac{21\,000}{1 + 0{,}04 \cdot \ldots} \simeq \ldots$ euro
Determina l'interesse sottraendo al montante il capitale.	**d.** Determina l'interesse: $I = M - C = 21\,000 - \ldots \simeq \ldots$ euro

3

Passi del procedimento	**Un capitale di 23 000 euro, investito in regime di interesse semplice per 4 anni, 4 mesi e 12 giorni, ha prodotto un montante di 26 013 euro.** **a. Determinare il tasso di interesse annuo percentuale.** **Supponendo poi di ottenere lo stesso montante dallo stesso capitale con un tasso annuo semplice del 4,5%:** **b. determinare per quanto tempo il capitale è stato investito.**
Risolvi la formula $M = C(1 + it)$ rispetto a i, verificando che: $i = \left(\frac{M}{C} - 1\right) \cdot \frac{1}{t}$ Sostituisci quindi i valori noti, dopo avere trasformato il tempo in anni.	**a.** Esprimi il tempo in anni: $t = 4$ anni, 4 mesi e 12 giorni $= \left(4 + \frac{4}{\dots\dots} + \frac{12}{\dots\dots\dots}\right) = \dots\dots\dots$ anni Determina il tasso di interesse: $i = \left(\frac{M}{C} - 1\right) \cdot \frac{1}{t} = \left(\frac{26\,013}{23\,000} - 1\right) \cdot \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = \dots\dots\%$ Osserva che avresti potuto determinare il tasso anche calcolando preliminarmente l'interesse $(I = M - C)$ e utilizzando poi la formula $i = \frac{I}{Ct}$.
Risolvi la formula $M = C(1 + it)$ rispetto a t, verificando che: $t = \left(\frac{M}{C} - 1\right) \cdot \frac{1}{i}$ e sostituisci i valori noti.	**b.** Determina il tempo in anni: $t = \left(\frac{M}{C} - 1\right) \cdot \frac{1}{i} = \left(\frac{26\,013}{23\,000} - 1\right) \cdot \frac{1}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$ anni
Trasforma il numero decimale in anni, mesi e giorni.	La parte intera del risultato ottenuto rappresenta gli anni, ossia ..... mesi $= (2{,}9111 - \dots\dots) \cdot 12 = 10{,}9333$ mesi La parte intera del risultato ottenuto rappresenta i mesi, ossia ..... giorni $= (10{,}9333 - \dots\dots) \cdot 30 = \dots\dots$ giorni

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere problemi sul regime di capitalizzazione composta.

4

Passi del procedimento	**Un capitale di 20 150 euro viene investito al tasso annuo composto del 5,3% per 5 anni, 4 mesi e 18 giorni.** **a. Determinare il montante;** **b. determinare l'interesse.** **Supponendo poi che alle stesse condizioni di tasso e di tempo un capitale generi un montante di 24 650 euro:** **c. determinare il capitale iniziale.**
Dopo aver espresso il tempo in anni, determina il montante con la formula: $M = C(1 + i)^t$	**a.** Esprimi il tempo in anni: $t = 5$ anni, 4 mesi e 18 giorni $= \left(5 + \frac{4}{\dots\dots} + \frac{18}{\dots\dots\dots}\right) = \dots\dots\dots$ anni Determina il montante: $M = C(1 + i)^t = 20\,150 \cdot (1 + 0{,}053)^{\dots\dots} \simeq \dots\dots\dots\dots\dots$ euro
Determina l'interesse sottraendo al montante il capitale.	**b.** L'interesse è: $I = M - C = \dots\dots\dots\dots - 20\,150 = \dots\dots\dots\dots$ euro
Conoscendo il montante, determina il capitale utilizzando la formula inversa della legge di capitalizzazione composta, ossia: $C = \frac{M}{(1 + i)^t}$	**c.** Determina il capitale: $C = \frac{M}{(1 + i)^t} = \frac{24\,650}{(1 + 0{,}053)^{\dots\dots}} \simeq \dots\dots\dots\dots$ euro

Esercizi da svolgere

1 Completa la seguente tabella sull'esempio della seconda riga.

Tasso d'interesse percentuale	Tasso decimale	Punti base
2%	0,02	200
3,5%		
	0,0725	
	0,015	
		480

2 Completa la seguente tabella sull'esempio della seconda riga.

	In anni	In mesi	In semestri	In trimestri	In quadrimestri
1 giorno	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{180}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{120}$
8 settimane					
30 giorni					
100 giorni					
20 settimane					
2 anni e 6 mesi					
1 anno, 2 mesi, 15 giorni					

3 **Test.** Il grafico della funzione che esprime, in regime di capitalizzazione semplice, il montante M in funzione del tempo t, dati il capitale C e il tasso di interesse i, è:

A una semiretta
B un arco di parabola
C la parte contenuta nel primo quadrante del grafico di una funzione esponenziale
D nessuna delle risposte precedenti

Risolvi i seguenti problemi sulla capitalizzazione semplice.

4 Un capitale di 10 000 euro viene investito al tasso annuo semplice del 3,5% per 2 anni, 8 mesi e 22 giorni. Determina l'interesse e il montante. [I = 954,72 euro; M = 10 954,72 euro]

5 Un capitale di 34 000 euro viene investito al tasso annuo semplice del 7% per 3 anni, 5 mesi e 7 giorni. Determina l'interesse e il montante. [I = 8177,94 euro; M = 42 177,94 euro]

6 Un capitale di 5000 euro viene investito al tasso annuo semplice del 5,5% per 4 anni, 6 mesi e 15 giorni. Determina l'interesse e il montante. [I = 1248,96 euro; M = 6248,96 euro]

7 Un capitale, investito al tasso di interesse annuo semplice del 2,5% per 2 anni, 4 mesi e 18 giorni, ha generato un montante di 12 600 euro. Determina il capitale iniziale e l'interesse.
[C = 11 891,47 euro; I = 708,53 euro]

Sintesi visuale

Lo sconto

Sconto

Differenza tra il valore nominale (capitale) e il valore attuale. In simboli:

$$\underbrace{S}_{\text{Sconto}} = \underbrace{C}_{\text{Capitale}} - \underbrace{V}_{\text{Valore attuale}} \Rightarrow V = C - S$$

Regime di sconto commerciale

Lo sconto S_c relativo al capitale C, a un tasso di sconto d e a un tempo di anticipazione t è:

$$S_c = Cdt$$

Il valore attuale è:

$$V = C - S_c = C(1 - dt)$$

ESEMPIO

Lo sconto commerciale relativo al valore nominale di 2000 euro scontato al tasso di sconto annuo del 4,5%, 5 mesi e 10 giorni prima della scadenza è:

$$S_c = Cdt = 2000 \cdot 0{,}045 \cdot \left(\frac{5}{12} + \frac{10}{360}\right) = 40 \text{ euro}$$

Il valore attuale è:

$$V = C - S_c = 2000 - 40 = 1960 \text{ euro}$$

Regime di sconto razionale

Lo sconto S_r è uguale all'interesse che la somma scontata V produrrebbe se venisse impiegata, in *regime di interesse semplice*, per un tempo t uguale a quello di anticipazione. In formule:

$$S_r = Vit$$

Il valore attuale è:

$$V = \frac{C}{1 + it}$$

ESEMPIO

Un debito di 10 000 euro viene pagato 6 mesi prima della scadenza. È applicato uno sconto razionale e il tasso di interesse annuo è del 5,5%. La somma scontata è:

$$V = \frac{C}{1 + it} = \frac{10\,000}{1 + 0{,}055 \cdot \frac{6}{12}} \simeq 9732{,}36 \text{ euro}$$

Lo sconto è:

$$S_r = C - V = 10\,000 - 9732{,}36 = 267{,}64 \text{ euro}$$

Regime di sconto composto

Lo sconto S_{cp} è uguale all'interesse che la somma scontata V produrrebbe se venisse impiegata, in *regime di interesse composto*, per un tempo t uguale a quello di anticipazione. In formule:

$$S_{cp} = V[(1 + i)^t - 1]$$

Il valore attuale è:

$$V = \frac{C}{(1 + i)^t} = C(1 + i)^{-t}$$

ESEMPIO

Un debito di 12 000 euro viene estinto 8 mesi e 4 giorni prima della scadenza. Il credito viene scontato con sconto composto al tasso di interesse annuo del 5%. La somma scontata è:

$$V = \frac{C}{(1 + i)^t} = \frac{12\,000}{(1 + 0{,}05)^{\frac{8}{12} + \frac{4}{360}}} \simeq 11\,609{,}66 \text{ euro}$$

Lo sconto è:

$$S_{cp} = C - V = 12\,000 - 11\,609{,}66 = 390{,}34 \text{ euro}$$

Equivalenza finanziaria

Equivalenza finanziaria

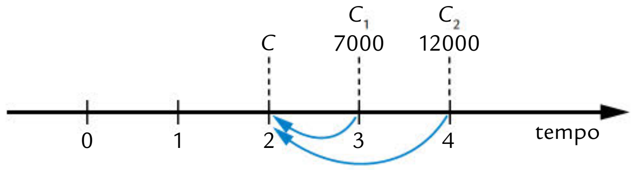
In un dato regime finanziario, a un tasso i, i due capitali C_1 e C_2 disponibili in tempi diversi t_1 e t_2 si dicono equivalenti se i loro valori, riferiti a uno stesso tempo t, sono uguali.

ESEMPI

1. Problema dell'unificazione dei capitali

Dobbiamo pagare due debiti, il primo di 7000 euro che scade tra 3 anni e il secondo di 12 000 euro che scade tra 4 anni. Il tasso è del 4% composto. Decidiamo di estinguere entrambi i debiti tra 2 anni. Determiniamo quale somma dovremo pagare.

Spostiamo i capitali indietro nel tempo, in $t = 2$. Per il principio di equivalenza finanziaria, il capitale incognito C deve essere uguale alla somma dei valori attuali, al tempo $t = 2$, dei capitali C_1 e C_2.

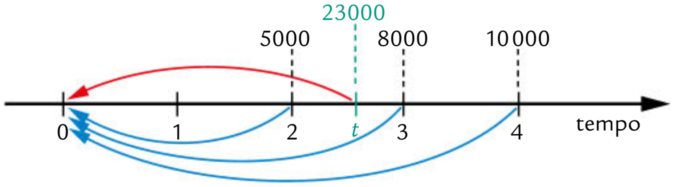


Otteniamo: $C = 7000(1 + 0,04)^{-1} + 12\,000(1 + 0,04)^{-2} \simeq 17\,566,57$ euro

2. Problema della scadenza media

Dobbiamo riscuotere tre crediti, concessi al tasso di interesse annuo composto del 5%: 5000 euro tra 2 anni, 8000 euro tra 3 anni, 10 000 euro tra 4 anni. Determiniamo la scadenza media di questi crediti, cioè il tempo in cui è equivalente riscuotere la loro somma.

Osserviamo che la somma dei tre crediti è $C = 5000 + 8000 + 10\,000 = 23\,000$ euro.
Sia t la scadenza media incognita in cui riscuotere la somma di 23 000 euro.
Imponiamo che la somma dei valori attuali al tempo $t = 0$ dei tre crediti sia uguale al valore attuale al tempo $t = 0$ del capitale di 23 000 euro.

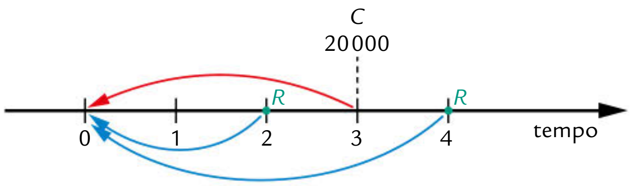


Ciò si traduce nella seguente equazione nell'incognita t, che risolviamo:
$5000(1 + 0,05)^{-2} + 8000(1 + 0,05)^{-3} + 10\,000(1 + 0,05)^{-4} = 23\,000(1 + 0,05)^{-t} \Rightarrow t \simeq 3,2$ anni

3. Problema della sostituzione dei pagamenti

Per estinguere un debito dobbiamo pagare 20 000 euro tra 3 anni. Possiamo estinguerlo anche in due rate uguali, la prima da pagare alla fine del secondo anno e la seconda da pagare alla fine del quarto. Il tasso composto è del 3%. Determiniamo l'importo della rata.

Imponiamo che il valore attuale al tempo $t = 0$ del capitale $C = 20\,000$ euro sia uguale alla somma dei valori attuali al tempo $t = 0$ delle due rate di importo incognito R da pagare ai tempi $t = 2$ e $t = 4$.



Ciò si traduce nella seguente equazione nell'incognita R, che risolviamo:
$R(1 + 0,03)^{-2} + R(1 + 0,03)^{-4} = 20\,000(1 + 0,03)^{-3} \Rightarrow R \simeq 9995,63$ euro

Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcuni problemi sullo sconto commerciale.

1

Passi del procedimento	**Per l'estinzione anticipata oggi di un debito di 13 000 euro che scade tra 1 anno e 2 mesi viene applicato un tasso di sconto commerciale annuo del 2,7%. Calcolare lo sconto praticato.**
Dopo aver espresso il tempo in anni, determina l'importo della somma scontata utilizzando la formula: $V = C(1 - dt)$	$t = 1$ anno e 2 mesi $= \left(1 + \frac{2}{12}\right)$anni = ... anni Determina l'importo della somma scontata: $V = C(1-dt) = 13\,000 \cdot (1 - 0{,}027 \cdot \ldots\ldots) \simeq \ldots\ldots$ euro
Determina lo sconto praticato come differenza fra l'importo del debito e la somma scontata.	Determina lo sconto: $S_c = C - V = 13\,000 - \ldots\ldots = \ldots\ldots$ euro

2

Passi del procedimento	**Un debito viene estinto 4 mesi e 18 giorni prima della scadenza. Sapendo che lo sconto praticato è stato di 470,25 euro e che è stato applicato un tasso di sconto commerciale annuo del 5,2%, determinare l'importo del debito e la somma scontata.**
Dopo aver espresso il tempo in anni, determina l'importo del debito utilizzando la formula: $C = \frac{S_c}{dt}$	$t = 4$ mesi e 18 giorni $= \left(\frac{4}{12} + \frac{18}{360}\right)$anni = ... anni Determina l'importo del debito: $C = \frac{S_c}{dt} = \frac{470{,}25}{0{,}052 \cdot \ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$ euro
Determina la somma scontata come differenza fra l'importo del debito e lo sconto praticato.	Determina la somma scontata: $V = C - S_c = \ldots\ldots - 470{,}25 = 23\,120{,}89$ euro

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a risolvere alcuni problemi sullo sconto razionale e sullo sconto composto.

3

Passi del procedimento	**Un debito di 4600 euro viene pagato 8 mesi e 20 giorni prima della scadenza in regime di sconto razionale.** **a. Calcolare la somma scontata supponendo un tasso annuo del 4,85%.** **b. Se la somma scontata, a parità di debito e di tempo, fosse di 4250 euro, determinare il tasso annuo di interesse.**
Dopo aver espresso il tempo in anni, determina l'importo della somma scontata utilizzando la formula: $V = \frac{C}{1 + it}$	**a.** Esprimi il tempo in anni: $t = 8$ mesi e 20 giorni $= \left(\frac{8}{12} + \frac{20}{360}\right)$anni = ... anni Determina l'importo della somma scontata: $V = \frac{C}{1+it} = \frac{4600}{1 + 0{,}0485 \cdot \ldots\ldots} \simeq \ldots\ldots$ euro
Risolvi la formula $V = \frac{C}{1+it}$ rispetto a i, verificando che: $i = \left(\frac{C}{V} - 1\right) \cdot \frac{1}{t}$ Sostituisci quindi in tale formula i valori noti.	**b.** Determina il tasso annuo di interesse: $i = \left(\frac{C}{V} - 1\right) \cdot \frac{1}{t} = \left(\frac{4600}{4250} - 1\right) \cdot \ldots \simeq \ldots\ldots\%$