Introduzione all'analisi
Sintesi visuale

Funzioni reali di variabile reale

Funzione

Una relazione che associa a ogni elemento di un insieme *A* uno e un solo elemento di un insieme *B*.
A e *B* sono detti, rispettivamente, **dominio** e **codominio**.

Funzione reale di variabile reale

Una funzione in cui il dominio e il codominio sono sottoinsiemi di **R**.

Dominio di una funzione $y = f(x)$

Il dominio è l'insieme dei valori di x per cui è definita l'espressione $f(x)$.

ESEMPI

$y = x^3 - 2x^2 + 1$ ha come dominio **R**.

$y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$ è definita purché risulti:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

Il dominio è quindi $\mathbf{R} - \{\pm 2\}$.

$y = \sqrt{x-5}$ è definita purché risulti:

$$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5$$

Il dominio è quindi $[5, +\infty)$.

$y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}$ ha come dominio **R**.

$y = \sqrt[3]{\dfrac{x}{x-1}}$ è definita purché risulti:

$$x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Il dominio è quindi $\mathbf{R} - \{1\}$.

$y = \ln(x^2 - 3x)$ è definita purché risulti:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 3$$

Il dominio è quindi $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

$y = e^{x - x^2}$ ha come dominio **R**.

$y = \sin(x^3 - 4x^2)$ ha come dominio **R**.

$y = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ è definita se è definito il suo argomento, cioè se $x \neq 0$.

Il dominio è quindi $\mathbf{R} - \{0\}$.

METODO

Le operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione sono sempre definite.

L'operazione di divisione è definita purché il divisore sia non nullo.

Un radicale di indice pari è definito solo se il radicando è positivo o nullo.

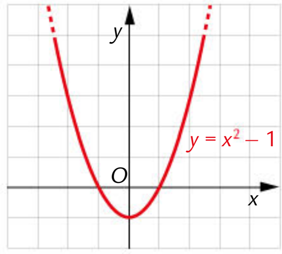
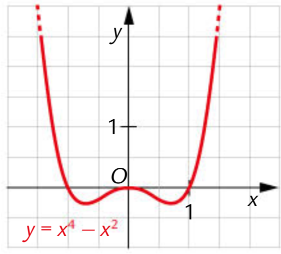
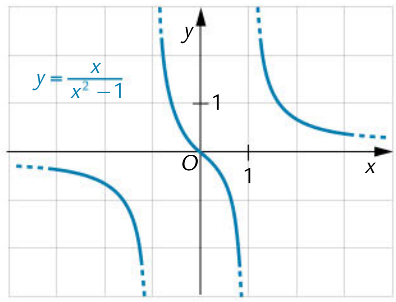
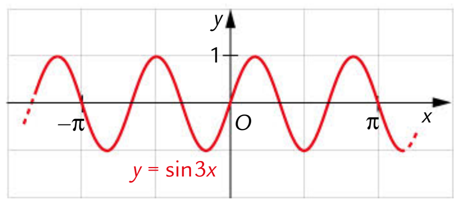
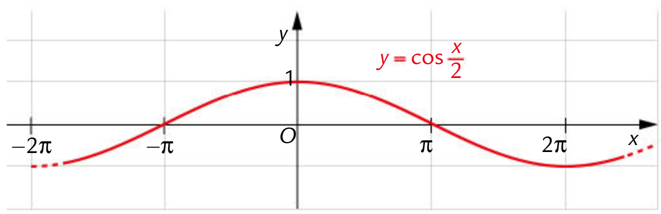
Un radicale di indice dispari è sempre definito purché esista il radicando.

Il logaritmo è definito se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1.

L'esponenziale è sempre definito purché esista l'esponente.

Seno e coseno sono definiti purché sia definito il loro argomento.

Proprietà di una funzione $f(x)$ di dominio D

Proprietà	ESEMPI
Funzione strettamente decrescente in $I \subset D$ Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$ **Funzione strettamente crescente in $I \subset D$** Se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$	$f(x) = x^2 - 1$ è: • strettamente decrescente nell'intervallo $x < 0$; • strettamente crescente nell'intervallo $x > 0$. 
Funzione pari Se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$ Il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'asse y. **Funzione dispari** Se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$ Il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all'origine degli assi.	$f(x) = x^4 - x^2$ è pari infatti: $f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 =$ $= x^4 - x^2 = f(x)$  $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ è dispari infatti: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} =$ $= -\dfrac{x}{x^2 - 1} = -f(x)$ 
Funzione periodica Se esiste un numero $T > 0$ tale che $f(x) = f(x + T) \quad \forall x \in D \quad [*]$ Il minimo valore di T che soddisfa la [*] è detto **periodo** della funzione. Le funzioni: $y = \sin(kx)$ e $y = \cos(kx)$, con $k > 0$, sono periodiche di periodo $\dfrac{2\pi}{k}$.	La funzione $f(x) = \sin 3x$ è periodica di periodo $\dfrac{2\pi}{3}$.  La funzione $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$ è periodica di periodo 4π. 
Funzione invertibile Se sussiste una corrispondenza biunivoca tra il dominio e l'insieme immagine. **Funzione inversa** Funzione che associa a ogni elemento dell'immagine di una funzione invertibile $y = f(x)$ la sua controimmagine.	La funzione $y = 2x + 5$ è invertibile. Scambiando la x con la y e risolvendo rispetto a y, otteniamo: $x = 2y + 5 \Rightarrow 2y = x - 5 \Rightarrow y = \dfrac{x - 5}{2}$ La funzione inversa è quindi: $y = \dfrac{x - 5}{2}$
Funzione composta Date due funzioni f e g, le funzioni composte sono: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$	$f(x) = 2x \quad g(x) = x^2 - 1$ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 - 1 = 4x^2 - 1$ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - 1) = 2x^2 - 2$

Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore di un insieme.

Passi del procedimento	**Determinare l'estremo superiore e l'estremo inferiore dell'insieme** $A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{x+3} \geq 0 \right\}$.
Rappresenta l'insieme con le notazioni di intervallo.	Risolvi la disequazione frazionaria che caratterizza gli elementi dell'insieme A: $\frac{1-x}{x+3} \geq 0 \Rightarrow -3 < x \leq .....$ In notazione di intervallo puoi scrivere quindi: $A = (-3, ...]$
Determina se l'insieme è inferiormente (o superiormente) limitato: • nel caso in cui lo sia determina l'estremo inferiore (superiore) e ricorda che se tale estremo appartiene all'insieme è anche il suo minimo (massimo); • nel caso in cui non lo sia concludi invece che l'estremo inferiore (superiore) è $-\infty$ $(+\infty)$.	L'insieme è sia inferiormente che superiormente limitato. $\inf A = -3$ e $\sup A = ...$ L'estremo superiore appartiene all'insieme A, quindi è anche il suo .... L'insieme A non ha invece un ....

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a determinare il dominio di una funzione.

2

Passi del procedimento	**Determinare il dominio della funzione:** $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 4}$
Ricorda che l'operazione di divisione è definita purché il divisore non sia nullo.	La funzione è definita purché risulti: $x^2 - 5x + 4 \neq 0 \Rightarrow (x - .....)(x - .....) \neq 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \neq ..... \wedge x \neq .....$
Concludi.	Il dominio di f è: $D = (-\infty, ...) \cup (....., ...) \cup (....., +\infty)$

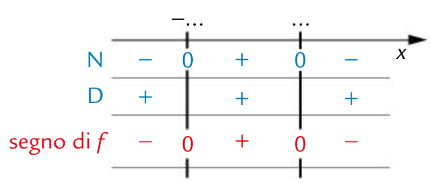
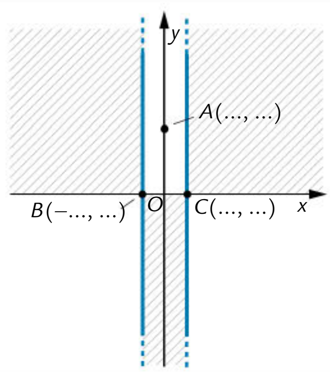
3

Passi del procedimento	**Determinare il dominio della funzione:** $f(x) = \frac{\sqrt{1 - 4x^2}}{x}$
Ricorda che: • l'operazione di divisione è definita purché il divisore non sia nullo; • un radicale di indice pari è definito solo se il radicando è positivo o nullo.	Poni a sistema le due condizioni relative all'esistenza della divisione e della radice quadrata: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1 - 4x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -..... \leq x \leq ..... \end{cases}$
Concludi.	Il dominio di f è: $D = [-....., 0) \cup (0, ...]$

4

Passi del procedimento	**Determinare il dominio della funzione:** $f(x) = \sqrt[3]{\log(x^2 - 1)}$
Ricorda che il logaritmo è definito se l'argomento è positivo e la base è positiva e diversa da 1. Un radicale di indice dispari è sempre definito purché esista il radicando.	L'unica condizione che devi imporre per determinare il dominio è la positività dell'argomento del logaritmo, ossia: $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -\ldots \vee x > \ldots$
Concludi.	Il dominio di f è $D = (-\infty, -\ldots) \cup (\ldots, +\infty)$.

5 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare gli eventuali punti d'intersezione con gli assi e il segno di una funzione.

Passi del procedimento	**Determinare gli eventuali punti di intersezione con gli assi e il segno della funzione** $f(x) = \dfrac{9 - x^2}{x^2 + 1}$.
Determina il dominio della funzione.	Dato che il denominatore della funzione è sempre positivo, il dominio della funzione è ....
Se il valore $x = 0$ appartiene al dominio della funzione, allora il grafico ha un punto di intersezione con l'asse y di cui puoi determinare l'ordinata calcolando $f(0)$.	Siccome $x = 0$ appartiene al dominio, il punto d'intersezione con l'asse y ha ordinata: $f(0) = \dfrac{9 - (0)^2}{(0)^2 + 1} = \ldots$ Quindi il punto d'intersezione con l'asse y è $A(\ldots, \ldots)$.
Per determinare le eventuali intersezioni del grafico con l'asse x poni $y = 0$ nell'equazione che definisce la funzione.	Risolvi l'equazione: $\dfrac{\ldots\ldots}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots = 0 \Rightarrow x = \pm\ldots$ Quindi i punti d'intersezione con l'asse x sono $B(\ldots, \ldots)$ e $C(\ldots, \ldots)$.
Determina il segno della funzione risolvendo la disequazione $f(x) > 0$.	Risolvi la disequazione $\dfrac{9 - x^2}{x^2 + 1} > 0$: • numeratore: $9 - x^2 > 0 \Rightarrow \ldots < x < \ldots$ • denominatore: $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \ldots\ldots\ldots$ Lo schema dei segni è:  La funzione f è positiva per $-\ldots < x < \ldots$
Individua le regioni del piano a cui appartiene il grafico della funzione coerentemente con i risultati ottenuti.	

Limiti di funzioni

Sintesi visuale

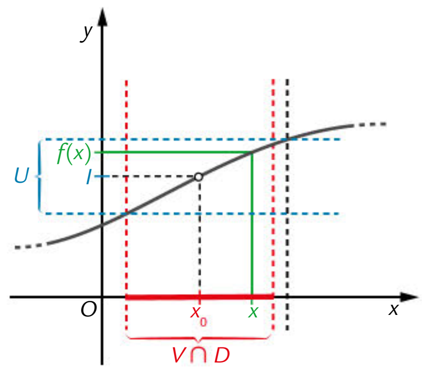
Definizione di limite di una funzione

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Si legge: «il limite della funzione $f(x)$ per x che tende a x_0 è l».

Intuitivamente significa che i valori di $f(x)$ sono vicini quanto si vuole a l pur di prendere valori di x sufficientemente vicini a x_0.

Indicato con D il dominio della funzione, formalmente significa che: «per ogni intorno U di l è possibile determinare un intorno V di x_0 tale che risulta $f(x) \in U$, per ogni $x \in V \cap D$, con $x \neq x_0$.»



L'algebra dei limiti

Regole di calcolo nel caso in cui i due limiti siano finiti

ESEMPI

$$\lim_{x \to 2}(3^x + x^2) = \lim_{x \to 2} 3^x + \lim_{x \to 2} x^2 = 9 + 4 = 13$$

$$\lim_{x \to -1} 3x^4 = 3 \lim_{x \to -1} x^4 = 3$$

$$\lim_{x \to 1}(e^x \cdot x^3) = (\lim_{x \to 1} e^x) \cdot (\lim_{x \to 1} x^3) = e \cdot 1 = e$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{3x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x}{\lim\limits_{x \to 2}(3x^2 + 1)} = \frac{2}{13}$$

METODO

Se due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ hanno limiti finiti l_1, l_2 per $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2$$

$$\lim_{x \to x_0} [k \cdot g(x)] = k \cdot l_1 \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = l_1 \cdot l_2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \text{ con } l_2 \neq 0$$

Regole di calcolo nel caso in cui uno dei due limiti sia infinito

ESEMPI

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(x^2 + 2x^4)}_{+\infty + \infty \to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{(2 + \ln x)}_{l - \infty \to -\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{x^3 \ln x}_{(+\infty) \cdot (+\infty) \to +\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{5}{x^3}}_{\frac{l}{-\infty} \to 0^-} = 0^-$$

$$\lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{3 + e^x}{x}}_{\frac{l}{0^+} \to +\infty} = +\infty$$

METODO

Valgono le seguenti regole di calcolo:

1. $+\infty + \infty \to +\infty$; $-\infty - \infty \to -\infty$
2. $l \pm \infty \to \pm\infty$
3. $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) \to \pm\infty$
4. $\underbrace{l}_{l \neq 0} \cdot (\pm\infty) \to \pm\infty$
5. $\frac{\overbrace{l}^{l \neq 0}}{0} \to \pm\infty$; $\frac{l}{\pm\infty} \to 0$

Forme di indecisione

$\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$ $\quad +\infty - \infty$ $\quad 0 \cdot \infty$ $\quad 1^{\infty}$ $\quad 0^0$ $\quad (+\infty)^0$

Limiti di funzioni polinomiali

ESEMPI

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3-4x^2+2)=\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}(5x^4-3x^2+1)=\lim_{x\to+\infty}5x^4=+\infty$$

METODO

Per calcolare il limite di un polinomio per $x \to \pm\infty$ basta calcolare il limite del suo termine di grado massimo.

Limiti di funzioni razionali fratte

ESEMPI

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6-2x^5}{2x^4-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6}{2x^4}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^2-5x}{3x^2+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\overset{a=6}{6}x^2}{\underset{b=3}{3}x^2}=\frac{6}{3}=2$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^3+6x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3}=0$$

METODO

Se $P(x)$ è un polinomio di grado n e $Q(x)$ è un polinomio di grado m, per calcolare il limite del rapporto $\frac{P(x)}{Q(x)}$ per $x \to \pm\infty$ basta calcolare il limite del rapporto dei termini di $P(x)$ e $Q(x)$ di grado massimo:

- se $n > m$ $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\pm\infty$
- se $n = m$ $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a}{b}$
- se $n < m$ $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=0$

con a e b, rispettivamente, coefficienti del termine di grado massimo di $P(x)$ e $Q(x)$.

Limiti di funzioni trascendenti

ESEMPI

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x}=3\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}=3$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^3}=\Big(\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to\infty}\Big)\Big(\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}}\Big)=\infty$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-3^x}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{3^x-1}{x}}_{\to \ln 3}=-\frac{\ln 3}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+x)}{3x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\underbrace{\frac{\log_2(1+x)}{x}}_{\to\frac{1}{\ln 2}}=\frac{1}{3\ln 2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$$

METODO

Si cerca di ricondurre il limite a uno dei seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \qquad \forall a>0,\ a\neq 1$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a} \qquad \forall a>0,\ a\neq 1$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k \qquad \forall k\in\mathbf{R}$$

Esercizi guidati

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a ipotizzare il limite di una funzione f sulla base dei valori assunti da f in corrispondenza di opportuni valori di x.

1

Passi del procedimento	**Calcolare i valori assunti da $f(x) = 2^{-\frac{1}{\lvert x \rvert}}$ in corrispondenza di opportuni valori di x e formulare una congettura sul valore di $\lim_{x \to 0} 2^{-\frac{1}{\lvert x \rvert}}$**
Attribuisci alla variabile x valori sempre più vicini allo zero (sia positivi sia negativi) e osserva se i rispettivi valori di f si avvicinano sempre di più a un certo valore.	Attribuisci a x i seguenti valori e, aiutandoti con una calcolatrice, calcola i rispettivi valori di f:
Concludi.	Puoi quindi congetturare che: $\lim_{x \to 0} 2^{-\frac{1}{\lvert x \rvert}} = ...$

x	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	0	$+0{,}001$	$+0{,}01$	$+0{,}1$
$f(x)$	0,001			ND			0,001

2

Passi del procedimento	**Calcolare i valori assunti da $f(x) = \frac{x}{x+4}$ in corrispondenza di opportuni valori di x e formulare una congettura sul valore di $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+4}$**
Attribuisci alla variabile x valori positivi sempre più grandi e osserva se i rispettivi valori di f si avvicinano sempre di più a un certo valore.	Attribuisci a x i seguenti valori e, aiutandoti con una calcolatrice, calcola i rispettivi valori di f:
Concludi.	Puoi quindi congetturare che: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+4} = ...$

x	100	1000	10 000	100 000
$f(x)$	0,962			

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a calcolare alcuni limiti che non presentano forme di indecisione.

3

Passi del procedimento	**Calcolare i seguenti limiti:** $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{2x} - \log x \right)$	$\lim_{x \to 2} \left(e^{x-2} + \frac{x^2 - x}{3 - x} \right)$
Verifica se le due funzioni sono definite e continue nel punto in cui si vuole calcolare il limite. In tal caso i due limiti sono finiti e puoi usare la proprietà: $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$	La funzione data è continua in $x = 1$. Si ha: $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x+1}{2x} - \log x \right) =$ $= \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2x} - \lim_{x \to 1} \log x =$ $= \frac{1+1}{2 \cdot 1} - \log 1 =$ $= ....$	La funzione data è .... in $x =$ .... Si ha: $\lim_{x \to 2} \left(e^{x-2} + \frac{x^2 - x}{3 - x} \right) =$ $= \lim_{x \to 2} e^{x-2} + \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x}{3 - x} =$ $= e^{\cdots} + \frac{4 - .....}{3 - .....} =$ $= ....$

4

<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th>Calcolare i seguenti limiti:
a. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x-\dfrac{1}{x-2}\right)$
b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^x\right)$
c. $\lim\limits_{x\to 0^+}[(x+2)\cdot \ln x]$
d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2-4}{x-1}\right)$
e. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)$
f. $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)e^x$</th></tr>
<tr><td>Per determinare questi limiti ricorda la seguente tabella.

Aritmetizzazione parziale del simbolo di infinito	
$+\infty+\infty\to+\infty$ $-\infty-\infty\to-\infty$	
$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)\to\pm\infty$	
$l\pm\infty\to\pm\infty$	$\forall l\in\mathbf{R}$
$l\cdot(\pm\infty)\to\pm\infty$	$\forall l\in\mathbf{R}$, con $l\neq 0$
$\dfrac{l}{0}\to\pm\infty$	$\forall l\in\mathbf{R}$, con $l\neq 0$
$\dfrac{l}{\pm\infty}\to 0$	$\forall l\in\mathbf{R}$
$\dfrac{\pm\infty}{l}\to\pm\infty$	$\forall l\in\mathbf{R}$

</td><td>a. $\lim\limits_{x\to 2^+}\left(2x-\dfrac{1}{x-2}\right)=$
$=4\ -\ .....=.....$ $x-2\to 0^+$ quindi $\dfrac{1}{0^+}\to .....$

b. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1}{x}+2^x\right)=$
$=0^+ + ...=.....$ $\dfrac{1}{+\infty}\to 0^+$ mentre $2^{+\infty}\to .....$

c. $\lim\limits_{x\to 0^+}[(x+2)\cdot\ln x]=$
$=2\cdot\ (-.....)=-.....$ $\ln(0^+)\to -.....$

d. $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2-4}{x-1}\right)=\dfrac{.....}{0^{\cdots}}=.....$ $1^- -1\to 0^{\cdots}$

e. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(e^x+\dfrac{1}{e^x}\right)=$
$=0^+ + ...=.....$ $e^{-\infty}\to 0^+$ quindi $\dfrac{1}{e^{-\infty}}\to .....$

f. $\lim\limits_{x\to 3^+}(x-3)e^x=(.....)e^3=.....$ $3^+ -3\to .....$</td></tr>
</table>

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a calcolare alcuni limiti che presentano forme d'indecisione.

5

Passi del procedimento	Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+1)$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x^3-4x)$
I limiti si presentano nella forma di indecisione $+\infty-\infty$. Per calcolare il limite di un polinomio per $x\to\pm\infty$ basta calcolare il limite del suo termine di grado massimo.	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2-x+1)=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2=.....$	$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-x^3-4x)=$ $=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^{\cdots})=.....$

6

Passi del procedimento	Calcolare i seguenti limiti: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2-2x-1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{x^3+2x-1}$
I limiti si presentano nella forma di indecisione $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ricorda che per calcolare il limite del rapporto di due polinomi per $x\to\pm\infty$ basta calcolare il limite del rapporto dei loro termini di grado massimo.	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}x=.....$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+1}{2x^2-2x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2}=$ $=\dfrac{.....}{.....}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-4}{x^3+2x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^3}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{.....}{x}=.....$

7

<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th colspan="2">Calcolare i seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$</th></tr>
<tr><td>Il limite si presenta nella forma di indecisione $\dfrac{0}{0}$.
Rimuovi l'indeterminazione scomponendo il numeratore e il denominatore e semplificando poi il fattore comune.</td><td>Scomponi numeratore e denominatore:
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}=$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}(x+.....)}=$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)}{(x+.....)}=\dfrac{4}{.....}$</td><td>Scomponi numeratore e denominatore:
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}=$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^{...}}{(..........)(x+3)}=$
$=.....$</td></tr>
</table>

8

<table>
<tr><th>Passi del procedimento</th><th>Calcolare i seguenti limiti:
a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}$ c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
b. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}$ d. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})$</th></tr>
<tr><td>Le tecniche più comuni per risolvere le forme di indecisione con le funzioni irrazionali sono:
• raccogliere opportuni fattori;
• moltiplicare e dividere la funzione per un opportuno fattore razionalizzante.</td><td>a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=$ Raccogliendo x^2 nel radicando
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{x\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{3}{x}}=.....$ Portando fuori il termine x^2 dalla radice (poiché $x\to+\infty$ si ha $|x|=x$)

b. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-3x-4}=$
$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x+1)}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=$ Scomponendo il denominatore e moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x}+2)$
$=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(x+1)(\sqrt{x}+2)}=\dfrac{1}{.....}$ Semplificando il fattore $(x-4)$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=$ Moltiplicando e dividendo per $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1)-..............}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{..............}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=.....$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})=$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=$ Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}$
$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+3)-(.........)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{..................}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}=.....$</td></tr>
</table>

9

Passi del procedimento	Calcolare i seguenti limiti:
	a. $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}$ **c.** $\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{x}$ **b.** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$ **d.** $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}$
Puoi risolvere questi particolari limiti di funzioni trascendenti che presentano forme di indecisione cercando di ricondurti ai seguenti limiti notevoli: • $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}\quad\forall k\in\mathbf{R}$ [1] • $\lim_{x\to0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^{k}\quad\forall k\in\mathbf{R}$ [2] • $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}\quad\forall a>0,\ a\neq1$ [3] • $\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\quad\forall a>0,\ a\neq1$ [4]	**a.** $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{5x}=$ $=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}\right]^{5}=$ $=(e^{\cdots})^{5}=e^{\cdots}$ Per la [1] **b.** $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=$ $=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}\cdot3=$ $=\ldots..$ Per la [3], immaginando di porre $3x=t$ **c.** $\lim_{x\to0}\frac{3^{2x}-1}{x}=$ $=\lim_{x\to0}\frac{(3^2)^x-1}{x}=$ $=\lim_{x\to0}\frac{\ldots..-1}{x}=$ $=\ldots..$ Per la [4] **d.** $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}=$ $=\lim_{x\to0}\left[\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\cdots}=$ $=\lim_{x\to0}(e^{\cdots})^{\cdots}=\ldots..$ Per la [2]

10

Passi del procedimento	Calcolare il seguente limite:
	$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{4x}-1}$
Puoi risolvere questo limite di funzioni trascendenti che presenta una forma di indecisione usando più volte i limiti notevoli.	$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{4x}-1}=$ $=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{e^{4x}-1}\cdot\frac{x}{x}=$ Moltiplicando e dividendo per x $=\lim_{x\to0}\frac{\frac{(e^3)^x-1}{x}}{\frac{(e^4)^x-1}{x}}=\frac{\ldots..}{\ldots..}$ Per la [4]

Lezione 2 C Esercizi da svolgere

Test

1 Quanto vale $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - x)$?

A 0 B $+\infty$ C 3 D $-\infty$

2 Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, quale tra i seguenti limiti **non** è corretto?

A $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ B $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ C $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$ D $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Calcola i valori assunti dalle seguenti funzioni in opportuni valori di *x* che ti permettano di formulare una congettura sul valore dei seguenti limiti.

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 2}$ $[0]$

4 $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{x^3 - 8}$ $\left[-\dfrac{1}{12}\right]$

5 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x - 1}$ $[+\infty]$

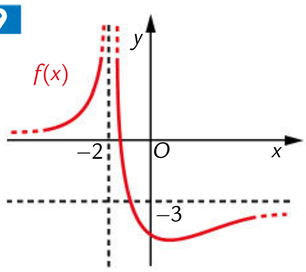
6 $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x + 1}$ $[-\infty]$

7 $\lim\limits_{x \to +\infty} \log\left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right)$ $[0]$

8 $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^{\frac{1}{x}}$ $[1]$

Deduci dai seguenti grafici i valori dei limiti indicati.

9



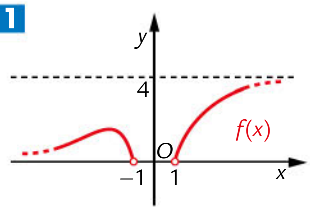
a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

b. $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) =$ ....

c. $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) =$ ....

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....

11



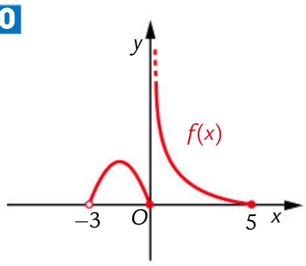
a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

b. $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) =$ ....

c. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) =$ ....

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....

10



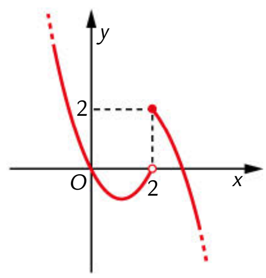
a. $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x) =$ ....

b. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) =$ ....

c. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) =$ ....

d. $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) =$ ....

12



a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) =$ ....

b. $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) =$ ....

c. $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) =$ ....

d. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) =$ ....

Calcola i seguenti limiti che non presentano forme d'indecisione.

13 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$ $\left[-\dfrac{1}{2}\right]$

14 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 3x^2}{x - 1}$ $[0]$

15 $\lim\limits_{x \to +\infty} (2^x - 1)$ $[+\infty]$

16 $\lim\limits_{x \to 0^+} (\ln x + 1)$ $[-\infty]$

17 $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{1}{x - 4}$ $[-\infty]$

18 $\lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{1}{x - 4}$ $[+\infty]$

19 $\lim\limits_{x \to -1} \left[\dfrac{x}{x^2 + 2} - \ln(-x)\right]$ $\left[-\dfrac{1}{3}\right]$

20 $\lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{2}{2 - x} - 2^x\right)$ $[-\infty]$

21 $\lim_{x\to 3}\left[\frac{x}{(x-3)^2}-x\right]$ $[+\infty]$

22 $\lim_{x\to +\infty}\left(3x-\frac{1}{x}\right)$ $[+\infty]$

23 $\lim_{x\to -\infty}(x-3^x)$ $[-\infty]$

24 $\lim_{x\to +\infty}(3x\cdot 2^x)$ $[+\infty]$

25 $\lim_{x\to -\infty}[x^3-\log(-x)]$ $[-\infty]$

Calcola i seguenti limiti che presentano forme d'indecisione.

26 $\lim_{x\to +\infty}(x-x^2+3)$ $[-\infty]$

27 $\lim_{x\to -\infty}(2x^2+4x)$ $[+\infty]$

28 $\lim_{x\to -\infty}(x^2+6x^3-2x+7)$ $[-\infty]$

29 $\lim_{x\to +\infty}(x^3-4x^4+3x)$ $[-\infty]$

30 $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x-5}{2x+6}$ $[2]$

31 $\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^4+x-3}{2x^2-5}$ $[+\infty]$

32 $\lim_{x\to +\infty}\frac{5x^2}{3-x}$ $[-\infty]$

33 $\lim_{x\to -\infty}\frac{4x}{5x-3}$ $\left[\frac{4}{5}\right]$

34 $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+2x}{x^3-4x+3}$ $[0]$

35 $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{10x^2-3x}{4x^2-7x+1}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

36 $\lim_{x\to \pm\infty}\frac{9x^2+x+3}{2x^2-1}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

37 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

38 $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x}$ $[1]$

39 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{(x-2)^2}$ $[\infty]$

40 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3}$ $[0]$

41 $\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(2x-1)^2}{6x-3}$ $[0]$

42 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-3x+2}$ $[6]$

43 $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{2x-2}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

44 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ $[3]$

45 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3+3x^2-x}$ $[-1]$

Calcola i seguenti limiti di funzioni algebriche irrazionali che presentano forme d'indecisione.

46 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^4+x-1}}{2x^2}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

47 $\lim_{x\to +\infty}\frac{6x+1}{\sqrt{9x^2+2x}}$ $[2]$

48 $\lim_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{3x^2+x}$ $[0]$

49 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ $[-2]$

50 $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{\sqrt{x}-2}$ $[0]$

51 $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x)$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

52 $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{9x^2+2x+5}-3x)$ $\left[\frac{1}{3}\right]$

53 $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-5x+1})$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

Calcola i seguenti limiti di funzioni trascendenti che presentano forme d'indecisione, utilizzando opportuni limiti notevoli.

54 $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}$ $[e^5]$

55 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{5}{x}}$ $[e^5]$

56 $\lim_{x\to \infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$ $[e^2]$

57 $\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ $[\sqrt{e}]$

58 $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ $\left[\frac{1}{e}\right]$

59 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{x}$ $[4]$

60 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$ $[5]$

61 $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+10x)}{x}$ $\left[\frac{10}{\ln 2}\right]$

Continuità
Sintesi visuale

Funzione continua in un punto

Sia f una funzione definita in un intorno completo di x_0. Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ la funzione f si dice **continua** in x_0.

Funzione continua

Funzione continua in tutti i punti del suo dominio.

Classificazione dei punti singolari

Punto singolare

Singolarità di prima specie (punto di salto)

Entrambi i limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esistono finiti ma sono diversi.

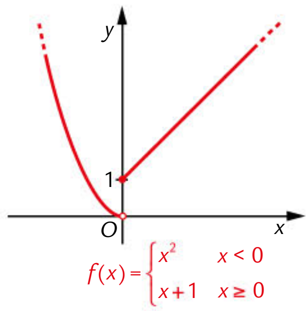
ESEMPIO

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

La funzione è definita e continua per $x \neq 0$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x+1) = 1$$



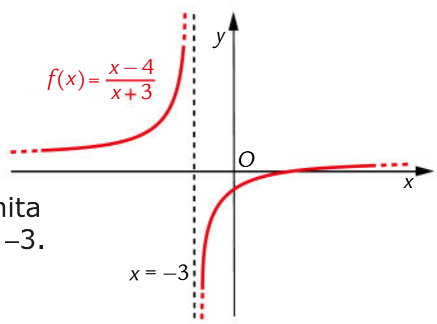
quindi $x = 0$ è un punto singolare di prima specie.

Singolarità di seconda specie

Almeno uno dei due limiti $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ non esiste o è infinito.

ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x-4}{x+3}$$



La funzione è definita e continua per $x \neq -3$.

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$$

quindi $x = -3$ è un punto singolare di seconda specie.

Singolarità di terza specie (eliminabile)

La funzione $f(x)$ non è definita in x_0, ma il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito oppure il $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste finito ma è diverso da $f(x_0)$.

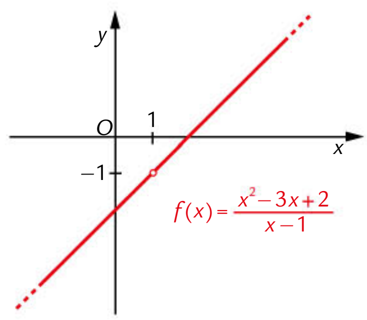
ESEMPIO

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

La funzione è definita e continua per $x \neq 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1^-$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -1^+$$



quindi $x = 1$ è un punto singolare di terza specie.

Proprietà delle funzioni continue in un intervallo chiuso e limitato

Teorema degli zeri

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Se la funzione assume valori **discordi** agli estremi dell'intervallo $[a, b]$, allora f ammette almeno uno zero interno all'intervallo.

Teorema di Weierstrass

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, allora f ammette massimo assoluto e minimo assoluto in $[a, b]$.

Asintoti di una funzione

Asintoto

Asintoto orizzontale

La retta di equazione $y = l$ è asintoto orizzontale se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$

Se il limite vale solo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, l'asintoto si dice rispettivamente destro o sinistro.

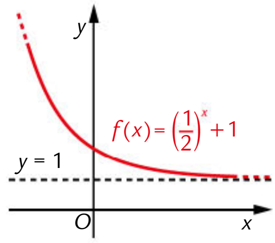
ESEMPIO

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

Calcoliamo i limiti di $f(x)$ per $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$:

$\lim_{x \to -\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right] = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1\right] = 1$



$y = 1$ è un asintoto orizzontale destro della funzione.

Asintoto verticale

La retta di equazione $x = x_0$ è asintoto verticale se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

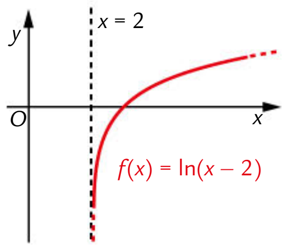
Se il limite vale solo per $x \to x_0^+$ o per $x \to x_0^-$, l'asintoto si dice rispettivamente destro o sinistro.

ESEMPIO

$f(x) = \ln(x - 2)$

Il dominio di f è $(2, +\infty)$.
Calcoliamo il limite di $f(x)$ per $x \to 2^+$:

$\lim_{x \to 2^+} [\ln(x - 2)] = -\infty$



$x = 2$ è un asintoto verticale destro della funzione.

Asintoto obliquo

La retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto obliquo se e solo se

$$\begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \\ \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx] = q \end{cases}$$

con $m, q \in \mathbf{R}$ e $m \neq 0$

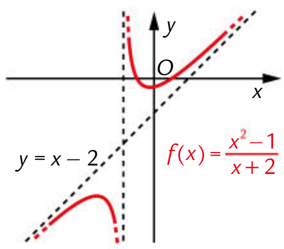
Se il limite vale solo per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, l'asintoto si dice rispettivamente destro o sinistro.

ESEMPIO

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

Calcoliamo i limiti di $f(x)$ per $x \to \pm\infty$:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$



Potrebbero esserci asintoti obliqui:

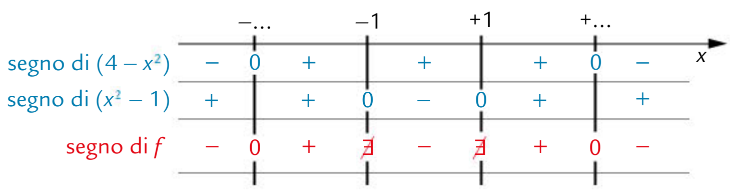
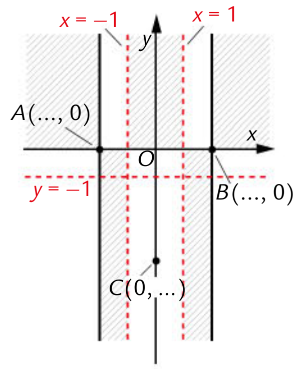
$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = -2$

$y = x - 2$ è asintoto obliquo della funzione.

Grafico probabile

Studiando il dominio, gli zeri, il segno, gli asintoti e gli eventuali punti singolari di una funzione è possibile tracciarne il grafico probabile.

8 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a tracciare il grafico probabile di una funzione razionale fratta.

Passi del procedimento	**Tracciare il grafico probabile della funzione:** $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2-1}$
Determina il dominio della funzione.	Poni il denominatore della funzione diverso da zero: $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1$ Ottieni quindi: $D=(-\infty,-1)\cup(\ldots\ldots,1)\cup(\ldots\ldots,+\infty)$
Riconosci eventuali simmetrie (funzione pari/dispari).	$f(-x)=\dfrac{4-(-x)^2}{(-x)^2-1}=\ldots\ldots\ldots=f(x)\Rightarrow$ la funzione è ...., e il suo grafico è quindi simmetrico rispetto ....
Determina l'eventuale punto di intersezione con l'asse y (se il valore $x=0$ appartiene al dominio).	$f(0)=\dfrac{4-0}{\ldots\ldots\ldots}=\ldots\ldots\Rightarrow$ l'intersezione con l'asse y è il punto $C(0,\ldots\ldots)$.
Determina le eventuali intersezioni con l'asse x.	Risolvi l'equazione $f(x)=0$: $\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=0\Rightarrow 4-x^2=0\Rightarrow x=\pm\ldots\ldots$ Quindi le intersezioni con l'asse x sono i punti $A(-\ldots\ldots,0)$ e $B(\ldots\ldots,0)$.
Studia il segno della funzione.	Risolvi la disequazione $\dfrac{4-x^2}{x^2-1}>0$, il cui schema dei segni è: 
Calcola i limiti agli estremi del dominio e determina le equazioni degli eventuali asintoti.	Calcola i limiti tenendo conto della simmetria di f: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=-1$ La retta $y=-1$ è quindi asintoto .... per f. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=\ldots\ldots$ e $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=\ldots\ldots$ La retta $x=-1$ è quindi asintoto .... per f. $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=\ldots\ldots$ e $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{4-x^2}{x^2-1}=\ldots\ldots$ La retta $x=1$ è quindi asintoto .... per f.
Rappresenta il grafico probabile della funzione coerente con le informazioni fin qui ottenute.	

La derivata

Sintesi visuale

Funzione derivabile in un punto x_0

La funzione $f(x)$, definita in un intorno di x_0, è derivabile in x_0 se:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ esiste ed è finito.

Il valore del limite è la derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Funzione derivata di $f(x)$

La funzione $f'(x)$ che:

- ha come dominio D l'insieme dei valori di x per cui $f(x)$ è derivabile;
- associa ad ogni $x \in D$ la corrispondente derivata della funzione f calcolata nel punto x.

Algebra delle derivate

Derivate di funzioni elementari

Funzione	Derivata	ESEMPI	
c (costante), $c \in \mathbf{R}$	0	$f(x) = 5$	$f'(x) = 0$
x	1	$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
x^{α}, $\alpha \in \mathbf{R}$	$\alpha x^{\alpha - 1}$	$f(x) = x^6$	$f'(x) = 6x^5$
$\log_a x$, $a > 0 \wedge a \neq 1$	$\frac{1}{x \ln a}$	$f(x) = \log_2 x$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$
a^x, $a > 0 \wedge a \neq 1$	$a^x \ln a$	$f(x) = 4^x$	$f'(x) = 4^x \ln 4$
$\sin x$	$\cos x$	$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$

ESEMPI

$D(3\ln x) = 3 \cdot D(\ln x) = \frac{3}{x}$

$D(\sin x + \cos x) = D(\sin x) + D(\cos x) =$
$= \cos x - \sin x$

$D(x^3 e^x) = D(x^3) \cdot e^x + x^3 \cdot D(e^x) =$
$= 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x)$

$D\left(\frac{x-1}{x^2+3x}\right) =$

$= \frac{D(x-1) \cdot (x^2+3x) - (x-1) \cdot D(x^2+3x)}{(x^2+3x)^2} =$

$= \frac{1 \cdot (x^2+3x) - (x-1)(2x+3)}{(x^2+3x)^2} =$

$= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3x)^2}$

$f(x) = \sqrt{x} \wedge g(x) = 2x - 1$

$D(\sqrt{2x-1}) = D\left((2x-1)^{\frac{1}{2}}\right) =$

$= \underbrace{\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}}_{f'(g(x))} \cdot \underbrace{2}_{g'(x)} = (2x-1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

Regole di derivazione

$D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$

$D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$

$D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

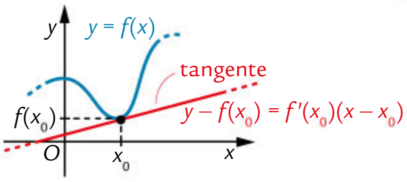
$D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$

$D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Interpretazione geometrica del concetto di derivata

Interpretazione geometrica

Una funzione derivabile in un punto x_0 è una funzione per cui esiste e non è verticale la tangente al grafico della funzione nel punto di ascissa x_0; in tal caso il coefficiente angolare della tangente è $f'(x_0)$.

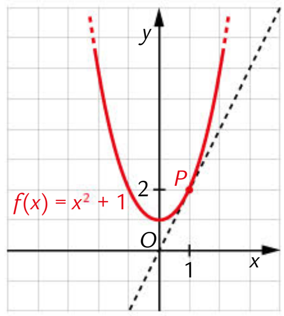


ESEMPIO

La derivata di $f(x) = x^2 + 1$ nel punto $x = 1$ vale:

$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$

Il coefficiente angolare della tangente alla parabola $f(x)$ nel suo punto di ascissa 1 è $m = 2$.



Classificazione dei punti di non derivabilità

Punto di non derivabilità

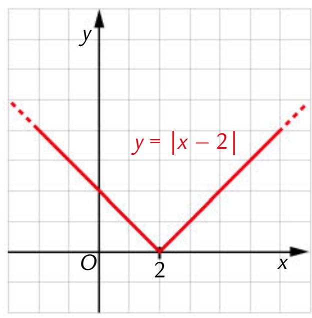
Punto in cui la funzione **non** è derivabile.

Punto angoloso

La derivata destra e la derivata sinistra di x_0 esistono, sono diverse tra loro e almeno una delle due è finita.

ESEMPIO

La funzione $y = |x - 2|$ presenta in $x = 2$ un punto angoloso.

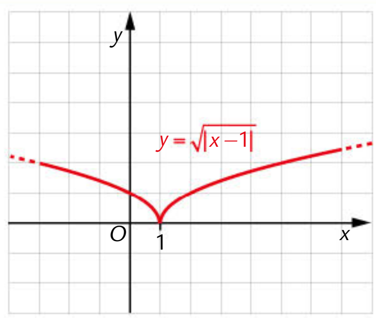


Cuspide

Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite e di segno opposto.

ESEMPIO

La funzione $y = \sqrt{|x - 1|}$ presenta in $x = 1$ un punto di cuspide.

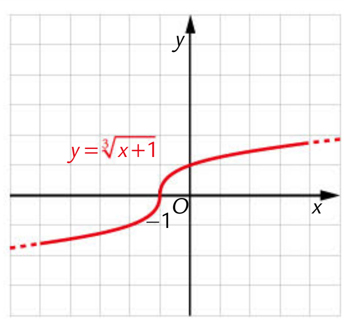


Flesso a tangente verticale

Sia la derivata destra sia la derivata sinistra in x_0 sono infinite e hanno lo stesso segno.

ESEMPIO

La funzione $y = \sqrt[3]{x + 1}$ presenta in $x = -1$ un punto di flesso a tangente verticale.



Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a calcolare la derivata di una funzione in un punto, in base alla definizione.

Passi del procedimento	**Determinare la derivata della funzione $f(x) = x^3 - 1$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$, in base alla definizione.**
Determina il rapporto incrementale della funzione f nel punto $x = x_0$, ossia: $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	Il rapporto incrementale di f nel punto $x_0 = 2$ è: $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{[(\ldots\ldots)^3-1]-[(2)^3-\ldots]}{h} = \dfrac{\ldots\ldots - 1 - 8 + \ldots}{h} = \dfrac{h^3 + \ldots h^2 + \ldots h}{h}$
Calcola il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale, cioè: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+\ldots h^2+\ldots h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(h^2+\ldots h+\ldots)}{h} = \ldots$
Se tale limite esiste finito, allora il suo valore è la derivata di f in $x = x_0$.	La funzione è quindi derivabile in $x_0 = 2$ e $f'(2) = \ldots$

2 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a calcolare la derivata di una funzione, in base alla definizione.

Passi del procedimento	**Determinare la derivata della funzione $f(x) = 3x^2 + 2$, in base alla definizione.**
Determina il rapporto incrementale della funzione nel generico punto x, ossia: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Il rapporto incrementale di f nel generico punto x è: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{[3(\ldots\ldots)^2+2]-(\ldots\ldots)}{h} = \dfrac{3x^2+\ldots+\ldots+2-\ldots-\ldots}{h} = \dfrac{\ldots xh+\ldots h^2}{h}$
Calcola il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale, cioè: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$	$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ldots xh+\ldots h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h(\ldots x+\ldots h)}{h} = \ldots$
La funzione così ottenuta è la derivata di f.	La derivata della funzione è quindi $f'(x) = \ldots$

Completa le seguenti tabelle in cui ti guidiamo a calcolare la derivata di alcune funzioni utilizzando le derivate delle funzioni elementari e le regole di derivazione.

3

Passi del procedimento	**Determinare la derivata delle seguenti funzioni:** **a.** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b.** $f(x) = \log_5 x$ **c.** $f(x) = 4^x$
Ricorda le seguenti derivate delle funzioni elementari: $D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ con $\alpha \in \mathbf{R}$ $D(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}$ con $a > 0 \land a \neq 1$ $D(a^x) = a^x \ln a$ con $a > 0 \land a \neq 1$	**a.** $f'(x) = D\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = D(x^{-\ldots}) = -\ldots x^{-\frac{1}{2}\ldots} = -\ldots x^{\ldots}$ $\quad \alpha = -\dfrac{1}{2}$ **b.** $f'(x) = D(\log_5 x) = \dfrac{1}{x\ldots}$ $\quad a = 5$ **c.** $f'(x) = D(4^x) = 4^x\ldots$ $\quad a = 4$

4

Passi del procedimento	Determinare la derivata delle seguenti funzioni: **a.** $f(x) = 4x\ln(x^2)$ **b.** $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^{2x}}$
Ricorda le principali regole di derivazione: $D[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$ $D[c \cdot f(x)] = c \cdot f'(x)$ $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $D[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	**a.** $f'(x) = D[4x\ln(x^2)] =$ **Funzione da derivare** $= D(4x) \cdot \ln(x^2) + 4x \cdot D[\ln(x^2)] =$ **Regola della derivata del prodotto** $= \ldots\ldots \cdot \ln(x^2) + 4x \cdot \frac{1}{x^2} \cdot D(x^2) =$ **Osservando che $\ln(x^2)$ è una funzione composta** $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ **b.** $f'(x) = D\left[\frac{x^3 - 1}{e^{2x}}\right] =$ **Funzione da derivare** $= \frac{D(x^3 - 1) \cdot e^{2x} - (x^3 - 1) \cdot D(e^{2x})}{(e^{2x})^2} =$ **Regola della derivata del quoziente** $= \frac{\ldots\ldots \cdot e^{2x} - (x^3 - 1)e^{2x} \cdot D(2x)}{e^{4x}} =$ **Osservando che e^{2x} è una funzione composta** $= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a determinare l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un suo punto.

Passi del procedimento	Determinare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ nel suo punto di ascissa $x_0 = 1$.
Determina il valore $f(x_0)$.	$f(1) = \ldots\ldots$
Calcola la derivata di f e determina poi $f'(x_0)$.	La derivata di f è: $f'(x) = \ldots\ldots x - 2$ Di conseguenza $f'(1) = \ldots\ldots$
Ricorda che l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	L'equazione della retta tangente è: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ Ossia: $y = \ldots\ldots(x - 1) + \ldots\ldots \Rightarrow y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a individuare gli eventuali punti di non derivabilità di una funzione e classificarli.

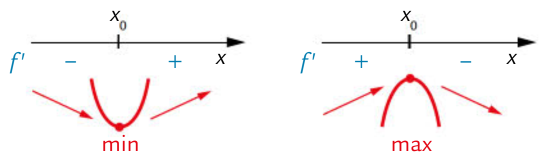
Passi del procedimento	Determinare gli eventuali punti di non derivabilità della funzione: $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$
Ricorda la classificazione dei punti di non derivabilità: • un punto si dice **angoloso** se la derivata destra e sinistra sono finite e diverse tra loro oppure una è finita e l'altra è infinita; • un punto si dice di **cuspide** se sia la derivata destra sia quella sinistra sono infinite e di segno opposto; • un punto si dice **flesso a tangente verticale** se sia la derivata destra sia quella sinistra sono infinite e hanno lo stesso segno.	Dopo aver verificato che la funzione è continua in $x = 0$, determina la sua derivata per $x \neq 0$: $f'(x) = \begin{cases} 3 & x < 0 \\ \ldots\ldots & x > 0 \end{cases}$ Quindi: $f'_{-}(0) = 3$ e $f'_{+}(0) = \ldots\ldots$ La funzione non è quindi derivabile in $x = 0$ dove presenta un punto $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Monotonia e punti stazionari

Si individuano i punti stazionari e si studia il segno della derivata prima.

Si analizza il segno della derivata prima nell'intorno di ciascun punto stazionario.

Se nell'intorno di un punto stazionario la derivata prima **cambia segno**, il punto stazionario è di **estremo relativo**. Precisamente, se la derivata prima in un intorno di x_0 passa da – a + si ha un punto di minimo relativo, se passa da + a – si ha un punto di massimo relativo:



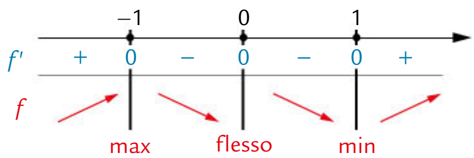
Se nell'intorno di un punto stazionario la derivata prima **non cambia segno**, il punto stazionario è di **flesso a tangente orizzontale**.

ESEMPIO

Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, studiamo $f'(x)$:

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1)$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$



Dallo schema del segno della derivata prima deduciamo che la funzione presenta un punto di massimo relativo per $x = -1$, un punto di minimo relativo per $x = 1$ e un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 0$.

Concavità e punti di flesso

Si individuano i punti in cui la derivata seconda si annulla (potenziali punti di flesso) e si studia il segno della derivata seconda.

Si analizza il segno della derivata seconda nell'intorno di ciascun punto in cui si annulla.

Se nell'intorno del punto la derivata seconda **cambia segno**, esistono un intorno destro (sinistro) in cui f è convessa, e un intorno sinistro (destro) in cui è concava, quindi il punto considerato è di flesso.

Se nell'intorno del punto la derivata seconda **non cambia segno**, in tale intorno la funzione è concava o convessa, quindi il punto **non** è di flesso.

ESEMPIO

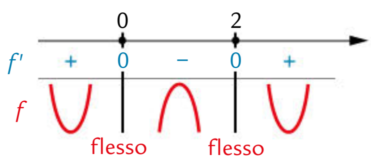
Data la funzione $f(x) = x^4 - 4x^3$, calcoliamo $f'(x)$:

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$

Studiamo $f''(x)$:

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 12x(x - 2) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$



Dallo schema del segno della derivata seconda deduciamo che la funzione presenta un punto di flesso in $x = 0$ e un punto di flesso in $x = 2$.

Lezione 7 A

Lo studio di funzione

Sintesi visuale

ESEMPIO

Studiamo la funzione $y = \dfrac{1-x}{x^2}$.

Il dominio è $\mathbf{R} - \{0\}$.

$f(-x) = \dfrac{1-(-x)}{(-x)^2} = \dfrac{1+x}{x^2} \Rightarrow$ la funzione non presenta simmetrie evidenti

Intersezioni con gli assi:

$\dfrac{1-x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ la funzione interseca l'asse x nel punto $(1, 0)$

$x = 0$ non appartiene al dominio, quindi f non ha punti di intersezione con l'asse y.

Positività della funzione:

$\dfrac{1-x}{x^2} > 0 \Rightarrow$ *Numeratore*: $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$
Denominatore: $x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$

$f(x)$ è positiva per $x < 1 \wedge x \neq 0$

Limiti agli estremi del dominio:

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ è asintoto orizzontale

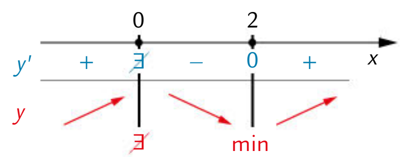
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 0$ è asintoto verticale

Studio della derivata prima:

$f'(x) = \dfrac{x-2}{x^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$



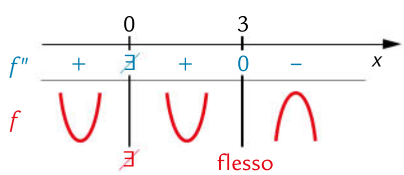
Dallo studio della derivata prima si individua un punto di minimo relativo per $x = 2$.

Studio della derivata seconda:

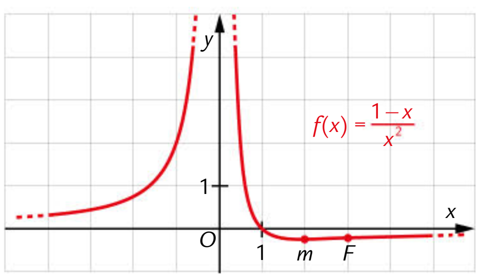
$f''(x) = \dfrac{2(3-x)}{x^4}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 3 \wedge x \neq 0$



Dallo studio della derivata seconda si individua un punto di flesso per $x = 3$.



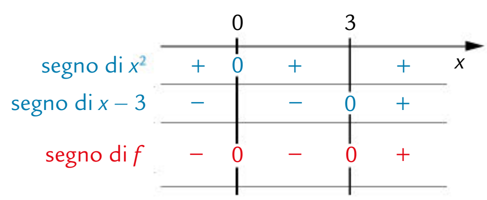
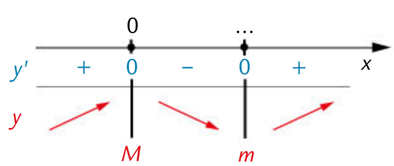
METODO

1. Si determina il dominio.
2. Si stabilisce se la funzione presenta simmetrie evidenti o se è periodica.
3. Si studiano gli eventuali punti di intersezione del grafico della funzione con gli assi e il suo segno.
4. Si studia il comportamento della funzione agli estremi del dominio.
5. Si calcola e si studia la derivata prima, individuando gli eventuali punti di massimo e minimo relativo e flesso a tangente orizzontale e gli eventuali punti di non derivabilità.
6. Si calcola e si studia la derivata seconda, individuando gli eventuali punti di flesso.
7. Si traccia il grafico della funzione.

Lezione

7 B Esercizi guidati

1 Completa la seguente tabella in cui ti guidiamo a studiare una funzione algebrica razionale.

Passi del procedimento	Studiare la funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$.
Determina il dominio.	Si tratta di una funzione algebrica razionale intera, quindi il dominio della funzione è **R**, ossia: $D = (....., ...)$
Riconosci eventuali simmetrie evidenti o periodicità.	$f(-x) = (.....)^3 - 3(.....)^2 = ... - 3x^2$ $f(-x).....f(x)$ e $f(-x)..... - f(-x)$ Quindi f non è né .... né ....
Determina gli eventuali punti d'intersezione con gli assi.	Ricerca gli eventuali punti d'intersezione con l'asse y: $\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = ... \\ x = ... \end{cases}$ quindi il grafico di f passa per .... Ricerca gli eventuali punti d'intersezione con l'asse x: $y = f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = ...$ Quindi il grafico di f passa anche per il punto $A(....., 0)$.
Determina il segno della funzione, cioè risolvi $f(x) > 0$.	$f(x) > 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 > 0 \Rightarrow x^2(x-3) > 0$ Lo schema del segno della funzione è:  Quindi la funzione è positiva per ....
Studia il comportamento della funzione agli estremi del dominio e determina le equazioni degli eventuali asintoti.	Calcoliamo i limiti di f per $x \to -\infty$ e $x \to .....$ $\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ $\lim_{x \to .....} (x^3 - 3x^2) = \lim_{x \to .....} x^3 = +.....$ Non ci sono né asintoti orizzontali né asintoti verticali. Si verifica facilmente che non ci sono nemmeno asintoti obliqui.
Studia la derivata prima e determina gli eventuali punti di estremo relativo.	$y' = 3x^2 - .....$ Si ha: $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - ..... = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = ...$ Lo schema sul segno della derivata prima e sulle relative deduzioni sul crescere e decrescere della funzione è:  Si ha: • un massimo relativo per $x = 0$, con $f(0) = ...$; • un minimo relativo per $x = ...$, con $f(.....) = ...$.