COMPITI DELLE VACANZE di MATEMATICA futura 5LES

- Svolgi, PER OGNI tipologia di esercizio, ALMENO la metà degli esercizi proposti.
- Risolvi gli esercizi inserendo sempre le regole che utilizzi;
- Per chi deve rafforzare la preparazione gli esercizi da eseguire sono invece più della metà di quelli proposti;
- Rivedere e le regole inserite nel drive.
- Svolgi gli esercizi su fogli (pinzati tra loro e/ inseriti in una busta di plastica) da consegnare il primo giorno al rientro delle vacanze alla professoressa per essere valutati;

ESPONENZIALI

114 Risolvi $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

$$3^x = \frac{\sqrt{3}}{9} \;\xrightarrow[\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}]{}\; 3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^{\square}} \;\xrightarrow[\text{proprietà delle potenze}]{}\; 3^x = 3^{\frac{1}{2}-\square} \;\rightarrow\; 3^x = 3^{-\frac{\square}{\square}} \;\xrightarrow[\text{potenze con la stessa base: uguagliamo gli esponenti}]{}\; x = -\frac{3}{2}$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

115 $3^{x+1} = 27$ $[2]$

116 $5^{2x} = \frac{1}{25}$ $[-1]$

117 $2^{3x-1} = 16$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

118 $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

119 $5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[-\frac{3}{2}\right]$

120 $3^x = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$ $\left[\frac{9}{4}\right]$

121 $4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

122 $\sqrt[3]{5^x} = \frac{1}{3125}$ $[-15]$

123 $8^x \cdot \sqrt{2} = 4^x$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

125 $\sqrt{3} \cdot 3^x = 27$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

126 $\sqrt[3]{5^x} = 25$ $[6]$

127 $4^{x+2} + \sqrt{8} = \sqrt{2}$ [impossibile]

128 $3^x \cdot 27 = 9^{2x}$ $[1]$

129 $t^2 \cdot t^{x+1} = \frac{t^{6x}}{t^5}$ $(t > 0)$ $\left[\frac{8}{5}\right]$

130 $9^{x+2} = \sqrt[3]{3^{x+7}}$ $[-1]$

131 $4^{2x+1} = 8^{2x-1}$ $\left[\frac{5}{2}\right]$

132 $8^{x-1} = \sqrt[3]{2^{x-3}}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

133 $5^x \cdot 25^x = \frac{1}{5}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

Equazioni esponenziali con raccoglimenti

135 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50$.

$$75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50 \underset{\text{proprietà delle potenze}}{\rightarrow} {}^{3}\cancel{75} \cdot \frac{5^{2x}}{\cancel{25}} - 5 \cdot 5^{2x} = -50 \underset{\text{raccogliamo } 5^{2x}}{\rightarrow} 5^{2x}(3-5) = -50 \rightarrow$$

$$-2 \cdot 5^{2x} = -50 \underset{\text{dividiamo per } -2}{\rightarrow} 5^{2x} = 5^2 \underset{\text{uguagliamo gli esponenti}}{\rightarrow} 2x = 2 \rightarrow x = 1$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

136 $2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ $[2]$

137 $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ $[3]$

138 $3^x - 3^{x-2} + 3^{x+1} = 35$ $[2]$

139 $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

140 $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ $[6]$

141 $2^x + 2^{x+1} = -2^{x-1} + 7$ $[1]$

142 $3^{2-x} + 3^{3-x} = 12$ $[1]$

143 $4^x + (2^x)^2 - 2^{2(x-2)} = 124$ $[3]$

144 $4^{2x-1} - 4^{2x+1} + 3 \cdot 2^{4x} = -\frac{3}{2}$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

145 $7^x + 49^{\frac{x}{2}} = 2 \cdot \sqrt[5]{343}$ $\left[\frac{3}{5}\right]$

Particolari equazioni con potenze con basi diverse

150 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo $6 \cdot 2^{x+3} = 4 \cdot 7^x - 2^x$.

$$6 \cdot 2^x \cdot 8 = 4 \cdot 7^x - 2^x \rightarrow 48 \cdot 2^x + 2^x = 4 \cdot 7^x \rightarrow 49 \cdot 2^x = 4 \cdot 7^x \underset{\text{dividiamo entrambi i membri per } 49 \cdot 7^x}{\rightarrow} \frac{2^x}{7^x} = \frac{4}{49} \underset{\text{proprietà delle potenze}}{\rightarrow} \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^2 \rightarrow x = 2$$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

151 $5 \cdot 2^x = 2 \cdot 5^x$ $[1]$

152 $3^{x+2} = 2^{2x+4}$ $[-2]$

153 $26 \cdot 2^x = 4 \cdot 5^x + 2^x$ $[2]$

154 $7^{x+1} = 3^{x+1}$ $[-1]$

155 $21 \cdot 3^x - 2^{x+3} = 3^{x+1}$ $[-2]$

156 $2^{x+2} - 4 \cdot 5^{x+2} = 25 \cdot 5^x - 4 \cdot 2^x$ $[-3]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

157 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo l'equazione $6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15$.

$$6 \cdot 3^x - 3^{2-x} = 15 \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{seconda proprietà}\\ \text{delle potenze}\\ a^x : a^y = a^{x-y}}} 6 \cdot 3^x - \frac{9}{3^x} = 15 \underbrace{\rightarrow}_{\text{sostituiamo } z = 3^x} \cancel{6}^{2} z - \frac{\cancel{9}^{3}}{z} = \cancel{15}^{5} \underbrace{\rightarrow}_{\substack{\text{riduciamo allo stesso}\\ \text{denominatore}}} \frac{2z^2 - 3 - 5z}{z} = 0 \underbrace{\rightarrow}_{\substack{z \neq 0\\ \text{perché } z = 3^x}}$$

$$2z^2 - 5z - 3 = 0 \rightarrow z_1 = -\frac{1}{2} \vee z_2 = 3$$

Sostituiamo nuovamente per tornare all'incognita x e risolviamo:

- $z_1 = -\frac{1}{2} \rightarrow 3^x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ impossibile;
- $z_2 = 3 \rightarrow 3^x = 3 \rightarrow x = 1$.

L'equazione data ha per soluzione $x = 1$.

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

158 $(3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ [0; 1]

159 $2^{2x} - 15 \cdot 2^x - 16 = 0$ [4]

160 $4^x = 2^x - 2$ [impossibile]

161 $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$ [2]

162 $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ [1]

163 $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ [-1; 2]

164 $5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$ [0; -2]

165 $\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$ [2]

166 $2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$ [-2]

167 $10^x + 10^{2-x} = 101$ [0; 2]

168 $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ [0; 2]

169 $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ [3]

170 $2^{x+1} + 2^{3-x} = 17$ [-1; 3]

171 $3^x + 3^{1-x} = 4$ [0;1]

172 $2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2} - x}$ $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

173 $(3^x - 5)^2 + 1 = 3^x - 5$ [impossibile]

174 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$ [-2; -3]

175 $-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$ [1]

176 $2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

177 $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$ [0; -1]

178 $3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$ [2]

179 $\frac{4}{2^x - 1} + \frac{3}{2^x + 1} = 5$ [1]

180 $\frac{2 \cdot (3^x + 1)}{3^x} = \frac{3 \cdot (3^x + 1)}{2 \cdot 3^x + 1}$ [impossibile]

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

228 Risolvi: **a.** $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; **b.** $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

se $a > 1$: $a^t > a^z \leftrightarrow t > z$
se $0 < a < 1$: $a^t > a^z \leftrightarrow t < z$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$

$5^{\frac{x}{3}} > \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{250}_{\,125}}$ dividiamo entrambi i membri per 250

$5^{\frac{x}{3}} > 5^{\square}$

$\frac{x}{3} > \square$ la base è 5 > 1: stesso verso nella disequazione

$x > -9$

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{\square} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\square}$ scriviamo $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ come potenze di $\frac{1}{3}$

$3x \;\square\; 4$ la base è $\frac{1}{3} < 1$: cambiamo verso nella disequazione

$x < \frac{4}{3}$

229 $4^x \leq 32$ $\left[x \leq \frac{5}{2}\right]$

230 $3^{2x} \geq 81$ $[x \geq 2]$

231 $7^{x+2} > 49$ $[x > 0]$

232 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+8} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^x$ $[x \leq 4]$

233 $\left(\frac{2}{7}\right)^{x+10} \leq 1$ $[x \geq -10]$

234 $e^{4x-5} - 1 > 0$ $\left[x > \frac{5}{4}\right]$

235 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$ $[x < 3]$

236 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{8}{27}$ $[x < -3]$

237 $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

238 $4^{x+1} - 4^{x-1} - 3 \cdot 4^x > 12$ $[x > 2]$

IN 2 PASSI

1. Con le proprietà delle potenze, metti in evidenza 4^x nei tre termini del primo membro.
2. Raccogli 4^x, semplifica e concludi.

239 $3^{x+1} - 3^x > 18$ $[x > 2]$

240 $2^{2x} + 4^x < 8$ $[x < 1]$

241 $9 + 2^x - 3 \cdot 2^{x+1} - 2^{x+2} \geq 0$ $[x \leq 0]$

242 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} < 64$ $[x > -2]$

243 $0{,}1^x \leq 100$ $[x \geq -2]$

244 $100^x < 0{,}001$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

245 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

246 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2} < \left(\frac{4}{25}\right)^{x^2-2}$ $[-2 < x < 2]$

247 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-2x} < \frac{3}{2}$ $[x \neq 1]$

248 $5^{x^2-1} > \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1}$ $[x < -3 \vee x > 0]$

249 $2^x \cdot 3^{x+1} \leq \frac{6^{3x}}{2}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

250 $\frac{2^x \cdot 8}{4^x} > \frac{16^{-x}}{8}$ $[x > -2]$

74 **ESERCIZIO GUIDA** Applicando le proprietà dei logaritmi sviluppiamo l'espressione $\log_2 \frac{a^6}{13\sqrt[4]{19}}$, con $a > 0$.

$\log_2 \frac{a^6}{13\sqrt[4]{19}} =$ logaritmo di un quoziente

$\log_2(a^6) - \log_2(13 \cdot \sqrt[4]{19}) =$ logaritmo di un prodotto

$\log_2 a^6 - \left(\log_2 13 + \log_2 \sqrt[4]{19}\right) =$ logaritmo di una potenza

$6\log_2 a - \log_2 13 - \frac{1}{4}\log_2 19$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

$a, b, c > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{R}$

Nell'ipotesi in cui tutte le lettere rappresentino numeri positivi, sviluppa le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

75 $\log \frac{3}{2}$ $[\log 3 - \log 2]$

76 $\log \sqrt[3]{4}$ $\left[\frac{2}{3}\log 2\right]$

77 $\log(4\sqrt{2})$ $\left[\frac{5}{2}\log 2\right]$

78 $\log \frac{3}{5a}$ $[\log 3 - \log 5 - \log a]$

79 $\log_5(3ab^2)$ $[\log_5 3 + \log_5 a + 2\log_5 b]$

80 $\log \frac{3\sqrt{a}}{b}$ $\left[\log 3 + \frac{1}{2}\log a - \log b\right]$

81 $\log \frac{5a}{b^4}\sqrt[7]{b}$ $\left[\log 5 + \log a - \frac{27}{7}\log b\right]$

82 $\log_{\sqrt{2}} \frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}$ $\left[-\frac{31}{5}\right]$

83 $\log(a^4 b^5 \sqrt{7})$ $\left[4\log a + 5\log b + \frac{1}{2}\log 7\right]$

84 $\log \frac{a^3(a^2+1)}{b^2}$ $[3\log a + \log(a^2+1) - 2\log b]$

88 Applica le proprietà dei logaritmi per trasformare in un unico logaritmo l'espressione

$$2\log_5 10 + \log_5 25 - \frac{1}{3}\log_5 64.$$

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

$2\log_5 10 + \log_5 25 - \frac{1}{3} \cdot \log_5 64 =$ logaritmo di una potenza

$\log_5 10^2 + \log_5 25 - \log_5 \sqrt[3]{\square} =$ logaritmo di un prodotto

$\log_5 100 \cdot \square - \log_5 4 =$ logaritmo di un quoziente

$\log_5 \frac{2500}{\square} = \log_5 625 = \log_5 5^{\square} = 4$

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, supponendo positivi tutti gli argomenti dei logaritmi.

89 $\log 3 + \log 7 - \log 6$ $\left[\log \frac{7}{2}\right]$

90 $\log_2 50 - \log_2 300 + \log_2 3$ $[-1]$

91 $\frac{1}{2}\log 81 - \log \frac{9}{7} + \log \frac{10}{7}$ $[1]$

92 $\frac{1}{3}\log 27 + \log 3 - \log 9$ $[0]$

93 $\frac{1}{4}\log 81 + 2\log \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log \frac{1}{9} + \log 2$ $[\log 2]$

94 $\log_3 \frac{9}{7} - \log_3 \frac{27}{7} + \log_3 \sqrt{3}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

95 $\frac{1}{3}[\log_3 35 - (\log_3 7 - 2\log_3 5)]$ $[\log_3 5]$

96 $2\ln 3 + \ln(2e^3) - \ln(18e^4)$ $[-1]$

97 $\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5 + \log_3 \frac{1}{b}$ $\left[\log_3 \frac{a}{5}\right]$

98 $\log_5 h - 2\log_5 b + \frac{1}{2}\log_5 6$ $\left[\log_5 \frac{h\sqrt{6}}{b^2}\right]$

99 $\frac{\log(20a) + \log(5b)}{2}$ $[\log 10\sqrt{ab}]$

100 $5\ln(x+2) - 2\ln x + \ln(2x)$ $\left[\ln \frac{2(x+2)^5}{x}\right]$

101 $2\log(x^2-1)-\log(x+1)-\log(x-1)$ $[\log(x+1)(x-1)]$

102 $\frac{1}{2}\log_3 x+2\log_3(x+1)-\log_3 7$ $\left[\log_3\frac{\sqrt{x}(x+1)^2}{7}\right]$

103 $\frac{1}{2}(\log 7+\log x-\log 3)+\log\sqrt{3x}$ $[\log x\sqrt{7}]$

104 $\log(x-1)+\log(x-2)-\log(x+3)$ $\left[\log\frac{(x-1)(x-2)}{x+3}\right]$

105 $\frac{1}{2}[\log_2 a+2\log_2(a+4)]-\log_2(a-1)$ $\left[\log_2\frac{\sqrt{a}\cdot(a+4)}{a-1}\right]$

106 $\log_2(x+1)+5\log_2(x-1)-4\log_2(x^2-1)$ $\left[\log_2\frac{x-1}{(x+1)^3}\right]$

108 **ESERCIZIO GUIDA** Trasformiamo il numero 5 in un logaritmo in base 2 e il numero $\frac{1}{3}$ in un logaritmo in base 10.

$5=5\cdot\underbrace{1}_{\log_2 2}=5\cdot\log_2 2\underbrace{=}_{\text{per la proprietà } n\log_a b=\log_a b^n}\log_2 2^5=\log_2 32$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\underbrace{1}_{\log_{10}10}=\frac{1}{3}\log_{10}10=\log_{10}10^{\frac{1}{3}}=\log_{10}\sqrt[3]{10}$

Trasforma i seguenti numeri in logaritmi nella base indicata.

109 1; -1; 3; $\frac{1}{8}$; base 2. $\left[\log_2 2; \log_2\frac{1}{2}; \log_2 8; \log_2\sqrt[8]{2}\right]$

110 1; -1; 0; 2; base 3. $\left[\log_3 3; \log_3\frac{1}{3}; \log_3 1; \log_3 9\right]$

Scrivi le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, supponendo che tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi.

111 $\log_2 15-\log_2 5+4$ $[\log_2 48]$

IN 2 PASSI
1. Trasforma 4 in un logaritmo in base 2.
2. Applica le proprietà dei logaritmi.

112 $2+\log_2 6$ $[\log_2 24]$

113 $\log 7-1$ $\left[\log\frac{7}{10}\right]$

114 $\log_3 7-1$ $\left[\log_3\frac{7}{3}\right]$

115 $\log_2 3+2-\log_2 12$ $[0]$

116 $\log_3 5-1+\log_3 6$ $[\log_3 10]$

117 $\log_4 27-2\log_4 3+\frac{1}{2}$ $[\log_4 6]$

118 $\frac{1}{2}\log_2 100-(\log_2 24-\log_2 6)+1$ $[\log_2 5]$

Formula del cambiamento di base

127 **ESERCIZIO GUIDA** Scriviamo $\log_2 3$ usando il logaritmo in base 10.

Utilizziamo la formula del cambiamento di base, in cui $a=2$, $b=3$, $c=10$:

$\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}$.

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
$a, b, c>0, a\neq 1, c\neq 1$

Trasforma i seguenti logaritmi in un rapporto di logaritmi in base 10. Calcola poi il loro valore con la calcolatrice, approssimando il risultato con quattro cifre decimali.

128 $\log_5 7$; $\log_4 61$; $\log_2 10$.

129 $\log_5 0{,}23$; $\ln 100$; $\log_2 32$.

130 $\log_3 99$; $\log_{\frac{1}{2}} 15$; $\ln 8$.

131 $\log_5 50$; $\log_{40} 80$; $\log_9 2$.

Semplifica le seguenti espressioni senza utilizzare la calcolatrice.

133 $\log_3 8 - \frac{1}{2\log_8 3} + \log_3 4 \cdot \log_4 7\sqrt{2}$ $[\log_3 28]$

IN 3 PASSI

1. Trasforma $\log_8 3$ e $\log_4 7\sqrt{2}$ in logaritmi in base 3.
2. Sostituisci nell'espressione e semplifica.
3. Applica le proprietà dei logaritmi per ottenere un unico logaritmo.

134 $\log_4 7 \cdot \log_7 16$ $[2]$

135 $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6$ $[\log_2 6]$

136 $\log_3 5 \cdot \log_{25} 9$ $[1]$

137 $\log_6 5 \cdot \log_5 \sqrt{6}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

138 $\log_3 8 \cdot \log_4 27$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

139 $\log_{25} 36 + \log_5 \frac{1}{6}$ $[0]$

140 $\log_8 15 + \frac{2}{3}\log_2 15$ $[\log_2 15]$

141 $(1 + \log_2 5) \cdot \log 4$ $[2]$

142 $\ln 1000 \cdot \log e + \log_2 e \cdot \ln 16$ $[7]$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

234 ESERCIZIO GUIDA Risolviamo l'equazione $\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - 3$.

- Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 8-x>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<8 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow 2<x<8$$

- Risolviamo l'equazione.
Al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a = 1$, possiamo scrivere:

$$3 = 3 \cdot 1 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3 = \log_2 8.$$

Sostituiamo questo risultato nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi.

$$\log_2(x-2) - \log_2(8-x) = \log_2 x - \log_2 8$$

$$\log_2 \frac{x-2}{8-x} = \log_2 \frac{x}{8}$$

uguagliamo gli argomenti

$$\frac{x-2}{8-x} = \frac{x}{8}$$

trasformiamo in equazione intera ricordando che $2 < x < 8$

$$8(x-2) = x(8-x)$$

$$x^2 - 16 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$$

$x_2 = -4$ non accettabile

- La soluzione dell'equazione è: $x = 4$.

Risolvi le seguenti equazioni.

235 $\log_5 x + \log_5 3 = \log_5 6$ $[2]$

236 $\log_2(x+1) = 2\log_2 3$ $[8]$

237 $\log_2(2x+11) = \log_2(x+10)$ $[-1]$

238 $2\log(x-7) = \log 25$ $[12]$

239 $\log_2 x - \log_2 7 = \log_2(x-1)$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

240 $\log x - 2\log 3 = \log(x-1)$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

241 $\log x - \log(x+1) = \log 2 - \log 5$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

242 $\log(x-1) + \log(x-3) = \log 8$ $[5]$

243 $\log_2 x + \log_2(x-1) = \log_2 3x$ $[4]$

244 $\log_2 x + \log_2(x-1) = 2\log_2 x$ [impossibile]

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

330 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo: **a.** $\log_{11}(2-x) > \log_{11}(x+2)$; **b.** $\log_{\frac{1}{5}}(20x) < -3$.

se $a>1$: $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b < c$
se $0<a<1$: $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b > c$
con $b, c > 0$

a. Dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza di } \log_{11}(2-x) \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza di } \log_{11}(x+2) \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases} \rightarrow -2<x<0$$

b. Osserviamo che si può scrivere

$$-3=-3\cdot \underbrace{1}_{\log_a a=1}=-3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{5} \underbrace{=}_{n\log_a b=\log_a b^n} \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}=\log_{\frac{1}{5}}5^3=\log_{\frac{1}{5}}125$$

e perciò la disequazione assume la forma:

$$\log_{\frac{1}{5}}(20x) < \log_{\frac{1}{5}}125.$$

Ora dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza di } \log_{\frac{1}{5}}(20x) \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella fra i logaritmi, essendo la base minore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\dfrac{25}{4} \end{cases} \rightarrow x>\frac{25}{4}$$

Risolvi le seguenti disequazioni.

331 $\log_3 x > 2$ $\quad [x>9]$

332 $\log_2 x \le \log_2(3x-1)$ $\quad \left[x \ge \frac{1}{2}\right]$

333 $\log_{0,3} x \le \log_{0,3}(2-x)$ $\quad [1 \le x < 2]$

334 $\log(9-x) \ge \log 12$ $\quad [x \le -3]$

335 $\ln x < 1$ $\quad [0<x<e]$

336 $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(4x)$ $\quad \left[x>\frac{1}{3}\right]$

337 $\log x \le -1$ $\quad \left[0<x\le \frac{1}{10}\right]$

338 $\log_{\frac{3}{4}} x < 2$ $\quad \left[x>\frac{9}{16}\right]$

339 $\log(x-3) \ge 0$ $\quad [x \ge 4]$

340 $\log_{0,5}(5+3x) \ge \log_{0,5}2$ $\quad \left[-\frac{5}{3}<x\le -1\right]$

341 $\log_{\frac{1}{2}}(2x) > 0$ $\quad \left[0<x<\frac{1}{2}\right]$

342 $\log_5(5-x) \le \log_5(5x+2)$ $\quad \left[\frac{1}{2} \le x < 5\right]$

343 $\log_{\frac{2}{3}}(3+x) < \log_{\frac{2}{3}}(2x-3)$ $\quad \left[\frac{3}{2}<x<6\right]$

344 $\log_3(2-5x) > 2$ $\quad \left[x<-\frac{7}{5}\right]$

345 $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) > -1$ $\quad \left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

346 $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right) < \log_5 4$ $\quad [-2<x<2]$

347 $\log_4(3x+x^2) > 1$ $\quad [x<-4 \vee x>1]$

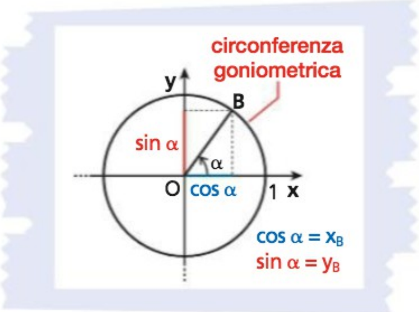
348 $\log_{0,2}(x^2-1)-\log_{0,2}(1-x)>0$ $\quad [-2<x<-1]$

349 $\log_6(x^2+5x+6)-1 \ge 0$ $\quad [x\le -5 \vee x \ge 0]$

350 $\log(2x-x^2) < \log(x-2)$ $\quad$ [impossibile]

GONIOMETRIA

83 **VERO O FALSO?**



a. Il seno di un angolo orientato è un segmento. V F

b. Se sin $\alpha < 0$ e cos $\alpha < 0$, allora il lato termine di α appartiene al quarto quadrante. V F

c. Se cos $\alpha > 0$, allora sin $\alpha > 0$. V F

d. Se cos $\alpha >$ cos β, allora $\alpha > \beta$. V F

84 **VERO O FALSO?**

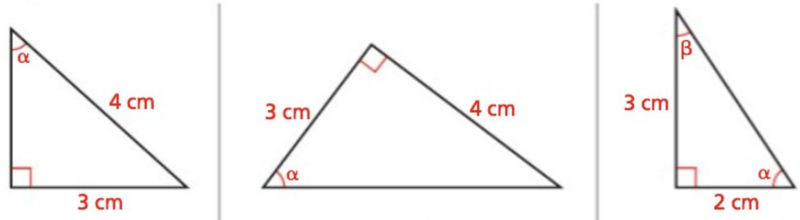
a. Se $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, allora $1 \leq \cos^2\alpha \leq 1$. V F

b. Se $\sin\alpha = \cos\alpha$, allora può essere solo $\alpha = \frac{\pi}{4}$. V F

c. Se $\sin\alpha = -\frac{8}{9}$, allora il lato termine di α appartiene al terzo quadrante oppure al quarto. V F

d. Non esiste nessun angolo α per cui $\cos\alpha = \frac{5}{4}$. V F

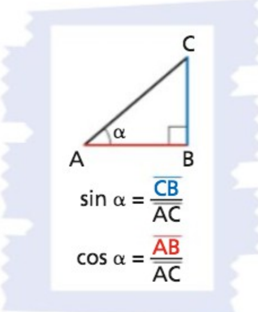
103 Utilizza i dati nelle figure per determinare i valori richiesti.



a: sin α = ☐ cos α = ☐

b: sin α = ☐ cos α = ☐

c: sin α = ☐ cos β = ☐



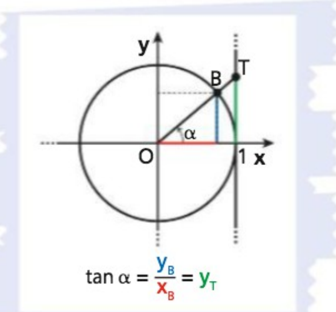
Semplifica le seguenti espressioni.

141 $2\sin\alpha(3\cos\alpha + 4\sin\alpha) + (\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$ [9]

142 $(1 + \sin\alpha)^2 + (2 - \cos\alpha)^2 - 2(\sin\alpha - 2\cos\alpha)$ [6]

143 $(a\sin\alpha - 2\cos\alpha)^2 + (a\cos\alpha + 2\sin\alpha)^2 - 4 + a^2\sin\frac{5}{2}\pi$ [$2a^2$]

154 **VERO O FALSO?**



a. $\tan\alpha$ non esiste solo per $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. V F

b. Se $\alpha = 120°$, allora $\tan\alpha < 0$. V F

c. Se $0 \leq \alpha < 360°$, $\tan\alpha = 0$ solo se $\alpha = 0$. V F

d. Se $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, allora $\tan\alpha > 0$. V F

e. Non esiste nessun angolo per cui $\tan\alpha = 10$. V F

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando le relazioni fondamentali della goniometria.

193 $\sin\alpha\tan\alpha+\cos\alpha(1-\sin\alpha)+\tan\alpha\cos^2\alpha$ $\left[\frac{1}{\cos\alpha}\right]$

194 $\frac{\sin^3\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\tan\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\tan\alpha}$ $[2\tan\alpha]$

195 $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}+\tan\alpha\cos\alpha-\frac{\tan^2\alpha+1}{\cos\alpha}$ $[\sin\alpha]$

196 $\frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}-\tan\alpha+\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$ $[-\tan\alpha]$

197 $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2\tan\alpha\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha-1$ $[2\sin^2\alpha]$

ANGOLI PARTICOLARI

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$
$\cot\alpha$	$\nexists$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\nexists$	0

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

237 $\sin30°-(\tan45°+\cos60°)$ $[-1]$

238 $\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}$ $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

239 $\left(\tan0-2\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$ $[2]$

240 $\frac{\sqrt{3}}{3}\tan30°+\sqrt{3}\tan60°$ $\left[\frac{10}{3}\right]$

241 $3\tan0°+4\cos30°\sin60°-\sqrt{2}\cos45°-6\sin90°$ $[-4]$

242 $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\pi+\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}$ $[1]$

243 $2\cos\frac{\pi}{4}\left(1+\sin\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}-2\sin\frac{\pi}{4}$ $[-2]$

244 $-\cos^2\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}$ $\left[\frac{\sqrt{2}-8}{4}\right]$

245 $4\sin\frac{\pi}{2}-3\left(\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\right)-2\sin\frac{\pi}{3}+\cos\pi$ $[-\sqrt{3}]$

246 $\frac{1}{3}\cos0°+\sqrt{3}\sin60°+4\cos90°-\frac{\sqrt{2}}{3}\cos45°-2\cos60°-\frac{3}{2}\sin90°$ $[-1]$

ANGOLI ASSOCIATI

I FONDAMENTALI

28

Angoli associati ed espressioni

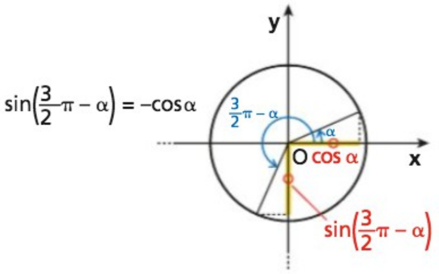
Semplifichiamo l'espressione $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos(\alpha+\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)$.

Individuiamo gli angoli associati e le formule utili.

L'espressione contiene gli angoli associati:

$$\frac{3}{2}\pi-\alpha;\ \alpha+\pi;\ \frac{\pi}{2}+\alpha;\ \pi-\alpha.$$

Per esempio, ricaviamo $\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)$.



Per ricavare le formule, senza memorizzarle:

- *rappresenta α e il suo associato sulla circonferenza goniometrica;*
- *evidenzia il segmento obiettivo dell'angolo associato;*
- *trova un segmento congruente a esso per α;*
- *scrivi la formula, prestando attenzione ai segni.*

Le altre formule utili sono:

$$\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha;\qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha;\qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha.$$

Sostituiamo nell'espressione e semplifichiamo.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)\cos(\alpha+\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)=$$

$$-\cos\alpha(-\cos\alpha)-(-\sin\alpha)\sin\alpha=\underbrace{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1}_{\text{prima relazione fondamentale}}$$

Semplifica le seguenti espressioni.

301 $\cos(-\alpha)+\cos(360°-\alpha)+\cos(180°-\alpha)-\cos(180°+\alpha)$ $[2\cos\alpha]$

302 $\tan(-\alpha)+\tan(180°-\alpha)+\tan(360°-\alpha)-\tan(180°-\alpha)$ $[-2\tan\alpha]$

303 $\sin(2\pi-\alpha)+2\cos(\pi+\alpha)+3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(-\alpha)$ $[-\sin\alpha]$

304 $\sin(90°+\alpha)\tan(-\alpha)+\sin(90°+\alpha)\cot(90°-\alpha)$ $[0]$

305 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\alpha+\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ $[\cot\alpha-1]$

306 $\tan(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)-\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)-\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ $[\tan\alpha]$

307 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cot\alpha+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)$ $[0]$

308 $\tan(\alpha+\pi)\cot(\pi-\alpha)+\sin(-\alpha)\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ $[-1+\cos\alpha]$

FORMULE GONIOMETRICHE

FORMULE DI ADDIZIONE

5 Calcola sin 75°, tan 75° e cos 15°.

Formule di addizione e sottrazione
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$;
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

- Possiamo scrivere $75° = 30° + \square$.
  Applichiamo le formule di addizione del seno e della tangente:

$$\sin(30° + 45°) = \sin 30° \cos 45° + \cos 30° \sin 45° = \frac{1}{2} \cdot \frac{\square}{\square} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4};$$

$$\tan(30° + 45°) = \frac{\tan \square + \tan 45°}{1 - \tan 30° \tan \square} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \square}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{\square} = 2 + \sqrt{3}.$$

razionalizziamo

- Calcoliamo ora cos 15°. Possiamo scrivere: $15° = 45° - \square$.
  Per la formula di sottrazione del coseno:

$$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos \square + \sin 45° \sin 30° = \frac{\square}{\square} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Applicando opportunamente le formule di addizione e sottrazione, calcola le seguenti funzioni goniometriche.

6 sin 15°; cos135°; tan 150°. $\left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

7 sin105°; sin 165°; $\tan\frac{5}{12}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; 2 + \sqrt{3}\right]$

8 sin 195°; cos165°; sin 285°. $\left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}; \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right]$

9 $\cos\frac{7}{12}\pi$; $\sin\frac{13}{12}\pi$; $\tan\frac{7}{12}\pi$. $\left[\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}; \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}; -2 - \sqrt{3}\right]$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

51 **FAI UN ESEMPIO** per mostrare che $\cos 2\alpha \neq 2\cos\alpha$.

- $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$ $\quad \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Espressioni e identità con le formule di duplicazione

52 **ASSOCIA** ogni espressione nella prima riga a quella equivalente nella seconda.

a. $\sin^2\alpha$ **b.** $\cos^2\alpha$ **c.** $\sin\alpha\cos\alpha$ **d.** $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

1. $\dfrac{\sin 2\alpha}{2}$ **2.** $-\cos 2\alpha$ **3.** $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ **4.** $\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

Semplifica le seguenti espressioni.

53 $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \tan\alpha$ $[1]$

54 $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha$ $[(\cos\alpha + \sin\alpha)^2]$

55 $\tan 2\alpha \cdot (1 + \tan\alpha) \cdot \cot\alpha$ $\left[\frac{2}{1 - \tan\alpha}\right]$

56 $\cos 2\alpha - \sin 2\alpha + (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$ $[2\cos^2\alpha]$

57 $\cos 2\alpha - \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$ $[-1]$

58 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} - \tan\alpha$ $[0]$

59 $\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \cot\alpha$ $[\tan\alpha]$

60 $\sin^2(2\pi - \alpha) + \cos^2(2\pi + \alpha) + \sin^2 2\alpha - 1$ $[4\sin^2\alpha\cos^2\alpha]$

TRIGONOMETRIA

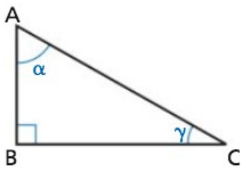
TEOREMA TRIANGOLI RETTANGOLI

Teoremi sui triangoli rettangoli

Attività interattiva

→ Teoria a p. 863

1 **VERO O FALSO?** Nel triangolo rettangolo della figura si ha:



a. $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\gamma$. V F

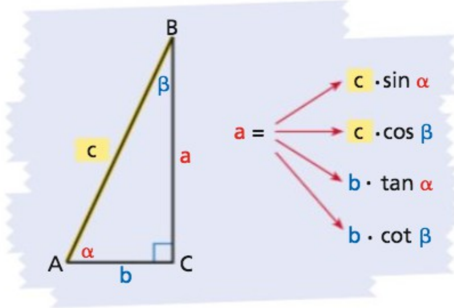
b. $\overline{AC} = \dfrac{\overline{AB}}{\cos\alpha}$. V F

c. $\overline{BC} = \overline{AB}\tan\gamma$. V F

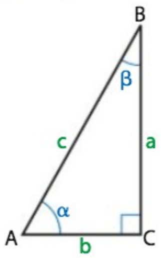
d. $\overline{AC} = \overline{BC}\sin\alpha$. V F

e. $\overline{AB} = \overline{BC}\cot\alpha$. V F

f. $\overline{AB} = \overline{AC}\cos\alpha$. V F



2 **COMPLETA** osservando la figura.



a. $c\cos\alpha = \square$, $\dfrac{b}{\sin\beta} = \square$.

b. $\sin\alpha = \dfrac{\square}{\square}$, $a\tan\beta = \square$.

c. $\dfrac{b}{a} = \tan\square$, $a = b\cot\square$.

d. $\dfrac{a}{c} = \cos\square$, $c\sin\alpha = \square$.

3 **TEST** Se in un triangolo rettangolo un cateto è lungo 30 cm e la tangente dell'angolo a esso opposto è $\dfrac{3}{5}$, quanto è lungo l'altro cateto?

A 50 cm

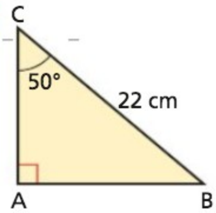
B 18 cm

C 2 cm

D 40 cm

COMPLETA arrotondando il risultato a meno di un decimo.

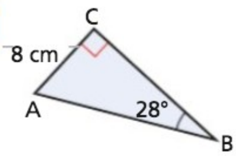
4



$AB = \square$ cm

$AC = \square$ cm

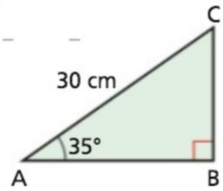
5



$BC = \square$ cm

$AB = \square$ cm

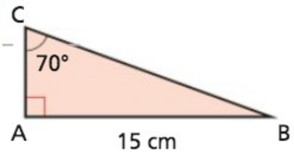
6



$AB = \square$ cm

$BC = \square$ cm

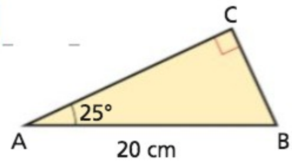
7



$AC = \square$ cm

$BC = \square$ cm

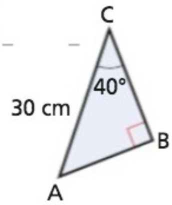
8



$AC = \square$ cm

$BC = \square$ cm

9



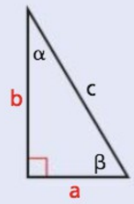
$AB = \square$ cm

$BC = \square$ cm

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Attività interattiva

→ Teoria a p. 865

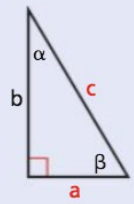


$\tan\alpha = \frac{a}{b}$

$\beta = 90° - \alpha$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

a. Sono noti i due cateti.

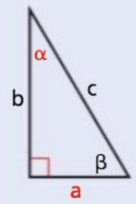


$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\beta = 90° - \alpha$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

b. Sono noti l'ipotenusa e un cateto.

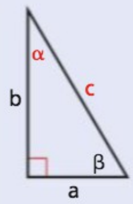


$\beta = 90° - \alpha$

$b = a \cdot \tan\beta$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

c. Sono noti un cateto e l'angolo opposto.



$\beta = 90° - \alpha$

$a = c \cdot \sin\alpha$

$b = c \cdot \sin\beta$

d. Sono noti l'ipotenusa e un angolo adiacente.

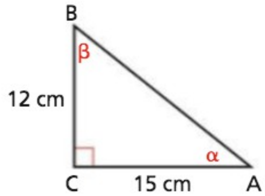
15 Risolvi un triangolo *ABC* rettangolo in *C*, sapendo che:

a. i due cateti sono lunghi 12 cm e 15 cm;

b. un cateto è lungo 10 cm e l'angolo adiacente misura 20°.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

a. Tracciamo la figura: dobbiamo calcolare α, β e *AB*.



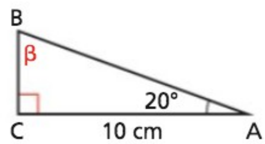
$$\tan\alpha = \frac{\square}{15} \quad \rightarrow \quad \alpha = \arctan\frac{\square}{15} \simeq 39°;$$

$$\beta = 90° - \square \simeq 51°.$$

Calcoliamo la misura dell'ipotenusa *AB* con il primo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{AC} = \overline{AB}\,\square \quad \rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\cos\alpha} \simeq \frac{15}{\cos 39°} \simeq 19 \quad \rightarrow \quad AB \simeq 19 \text{ cm}.$$

b. Tracciamo la figura: dobbiamo determinare β, *BC* e *AB*.



$$\beta = 90° - \alpha = 90° - \square = 70°$$

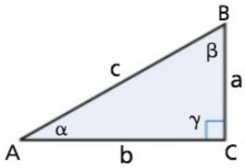
Per il secondo teorema dei triangoli rettangoli:

$$\overline{BC} = \overline{AC}\tan\square = 10\,\square \simeq 3{,}6 \quad \rightarrow \quad BC \simeq 3{,}6 \text{ cm}.$$

Troviamo $\overline{AB}$ con il teorema di Pitagora:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} \simeq \sqrt{100 + 12{,}96} \simeq 10{,}6 \quad \rightarrow \quad AB \simeq 10{,}6 \text{ cm}.$$

Risolvi il triangolo *ABC*, rettangolo in *C*, noti gli elementi indicati.



16 $b = 15;\quad \alpha = 30°.$ $[c = 10\sqrt{3};\ a = 5\sqrt{3};\ \beta = 60°]$

17 $c = 24;\quad \beta = 60°.$ $[b = 12\sqrt{3};\ a = 12;\ \alpha = 30°]$

18 $b = 8;\quad a = 8\sqrt{3}.$ $[c = 16;\ \beta = 30°;\ \alpha = 60°]$

19 $c = 48;\quad b = 24.$ $[a = 24\sqrt{3};\ \beta = 30°;\ \alpha = 60°]$

20 $b = 22;\quad \alpha = 45°.$ $[c = 22\sqrt{2};\ a = 22;\ \beta = 45°]$

21 $c = 28;\quad \alpha = 45°.$ $[b = 14\sqrt{2};\ a = 14\sqrt{2};\ \beta = 45°]$

22 $c = 26;\quad b = 10.$ $[a = 24;\ \beta \simeq 23°;\ \alpha \simeq 67°]$

23 $b = 30;\quad a = 40.$ $[c = 50;\ \beta \simeq 37°;\ \alpha \simeq 53°]$

24 $c = 36;\quad \beta = 18°.$ $[b \simeq 11{,}1;\ a \simeq 34{,}2;\ \alpha = 72°]$

25 $a = 5;\quad b = 12.$ $[c = 13;\ \beta \simeq 67°;\ \alpha \simeq 23°]$

26 $a = 5;\quad c = 5\sqrt{2}.$ $[b = 5;\ \beta = \alpha = 45°]$

27 $c = 5;\quad \beta = 10°.$ $[b \simeq 0{,}87;\ a \simeq 4{,}92;\ \alpha = 80°]$

28 $b = 16;\quad c = 34.$ $[a = 30;\ \beta \simeq 28°;\ \alpha \simeq 62°]$

29 $b = 12;\quad \beta = \frac{\pi}{3}.$ $\left[c = 8\sqrt{3};\ a = 4\sqrt{3};\ \alpha = \frac{\pi}{6}\right]$

30 $a = 3{,}5;\quad b = 12.$ $[c = 12{,}5;\ \beta \simeq 74°;\ \alpha \simeq 16°]$

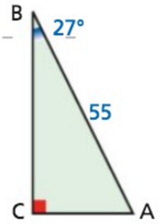
31 $c = 10;\quad \alpha = 20°.$ $[\beta = 70°;\ b \simeq 9{,}4;\ a \simeq 3{,}4]$

Primo teorema dei triangoli rettangoli
cateto = ipotenusa · seno dell'angolo opposto
cateto = ipotenusa · coseno dell'angolo adiacente

Secondo teorema dei triangoli rettangoli
cateto = altro cateto · tangente dell'angolo opposto al primo cateto
cateto = altro cateto · cotangente dell'angolo acuto adiacente al primo cateto

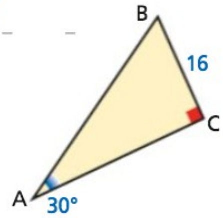
Risolvi i seguenti triangoli rettangoli, noti gli elementi indicati in figura.

38



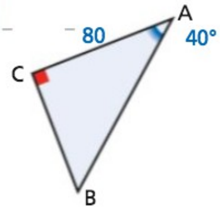
$[b \simeq 25;\ a \simeq 49;\ \alpha = 63°]$

39



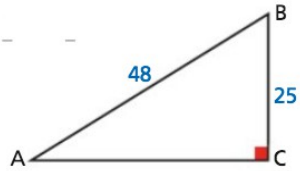
$[c = 32;\ b \simeq 27{,}7;\ \beta = 60°]$

40



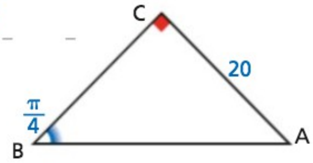
$[a \simeq 67;\ c \simeq 104;\ \beta = 50°]$

41



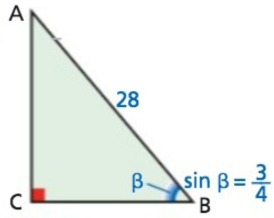
$[b \simeq 41;\ \beta \simeq 59°;\ \alpha \simeq 31°]$

42



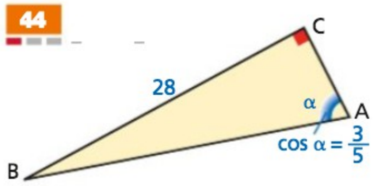
$\left[\alpha = \frac{\pi}{4};\ a = 20;\ c = 20\sqrt{2}\right]$

43



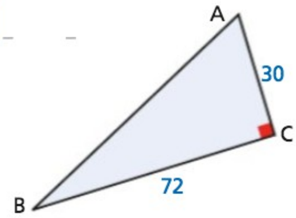
$[b = 21;\ a = 7\sqrt{7};\ \alpha \simeq 41°]$

44



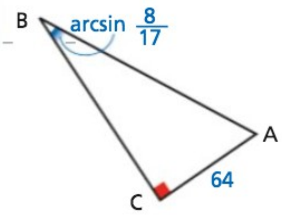
$[c = 35;\ b = 21;\ \beta \simeq 37°]$

45



$[c = 78;\ \beta \simeq 23°;\ \alpha \simeq 67°]$

46



$[c = 136;\ a = 120;\ \alpha \simeq 62°]$

TRIANGOLI QUALSIASI

TEOREMA DEI SENI

Teorema dei seni

Attività interattiva

→ Teoria a p. 869

165 Utilizza gli elementi indicati nella figura per trovare l'angolo β e i lati CB e AC del triangolo.

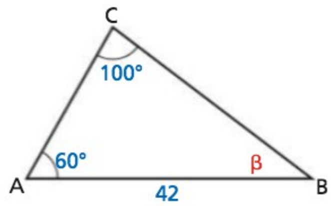
COMPLETA LO SVOLGIMENTO

$\beta = 180° - (100° + 60°) = 20°$

Applichiamo il teorema dei seni per determinare CB e AC:

$$\frac{\overline{CB}}{\sin \square} = \frac{42}{\sin 100°} \rightarrow \overline{CB} = \frac{\square}{\sin 100°} \cdot \sin 60° \simeq 36{,}9;$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 20°} = \frac{\square}{\sin 100°} \rightarrow \overline{AC} = \frac{42}{\sin 100°} \cdot \sin \square \simeq 14{,}6.$$

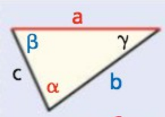


Del triangolo *ABC* sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

166 $a = 12,\quad b = 9,\quad \beta = 30°.\quad \sin\alpha?$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

167 $a = 20,\quad b = 9,\quad \alpha = 120°.\quad \sin\beta?$ $\left[\frac{9\sqrt{3}}{40}\right]$

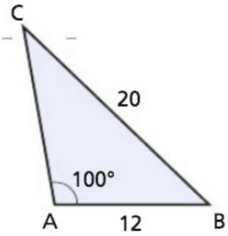
168 $a = 21,\quad c = 12,\quad \gamma = \frac{\pi}{3}.\quad \sin\alpha?$ [impossibile]



$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Nelle seguenti figure determina ciò che è richiesto.

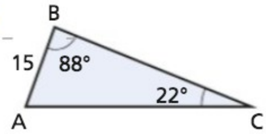
175



$\hat{C}$?

[36°]

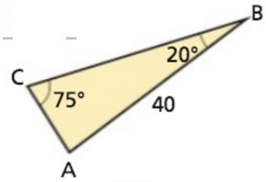
177



$\overline{AC}$?

[40]

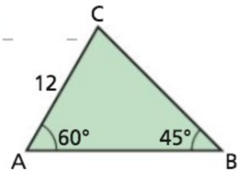
179



$\overline{AC}$?

[14]

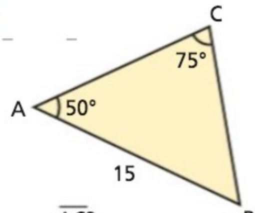
176



$\overline{AB}$?

$[6(\sqrt{3}+1)]$

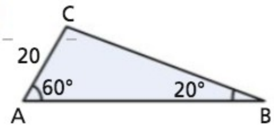
178



$\overline{AC}$?

[12,7]

180

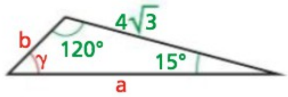


$\overline{AB}$?

[57,6]

Sono noti un lato e due angoli

214 Risolvi il triangolo *ABC*, sapendo che: $c = 4\sqrt{3}$, $\alpha = 120°$, $\beta = 15°$.



COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Ricaviamo γ per differenza: $\gamma = 180° - (120° + \boxed{}) = 45°$.

Applichiamo il teorema dei seni per calcolare *a* e *b*.

$$\frac{a}{\boxed{}} = \frac{c}{\sin\gamma} \rightarrow a = \frac{c\sin\alpha}{\boxed{}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}} = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{\boxed{}}{\sin\gamma} \rightarrow b = \frac{c\,\boxed{}}{\sin\gamma} = \frac{\cancel{4}\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) = 6-2\sqrt{3}$$

Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

215 $c = 12\sqrt{3}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. $\left[\beta = \frac{5}{12}\pi; a = 12\sqrt{2}; b = 6(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]$

216 $b = \sqrt{3}+1$, $\beta = 15°$, $\gamma = 120°$. $[\alpha = 45°; a = 4+2\sqrt{3}; c = 2\sqrt{6}+3\sqrt{2}]$

217 $a = 8\sqrt{6}$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{12}$. $\left[\gamma = \frac{\pi}{4}; b = 8\sqrt{3}-8; c = 16\right]$

218 $c = 4\sqrt{2}$, $\alpha = 30°$, $\gamma = \frac{7}{12}\pi$. $\left[\beta = \frac{\pi}{4}; a = 4\sqrt{3}-4; b = 4\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right]$

219 $b = 4\sqrt{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\tan\gamma = -\sqrt{3}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{12}; a = 6\sqrt{2}-2\sqrt{6}; c = 12\right]$

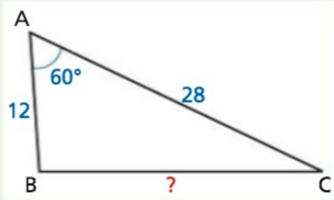
190 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo la misura del lato BC utilizzando gli elementi indicati nella figura.

Applichiamo il teorema del coseno: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cos B\widehat{A}C =$$

$$12^2 + 28^2 - 2\cdot 12\cdot 28\cos 60° = 144 + 784 - \cancel{2}\cdot 12\cdot 28\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = 592.$$

Quindi $\overline{BC} = \sqrt{592} \simeq 24{,}3$.



Del triangolo *ABC* sono noti alcuni elementi. Determina ciò che è richiesto.

191 $a = 12$, $b = 6$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$. c? $[6\sqrt{3}]$

192 $b = \sqrt{2}$, $c = 10$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. a? $[\sqrt{82}]$

193 $a = 15$, $c = 21$, $\beta = 40°$. b? $[13{,}5]$

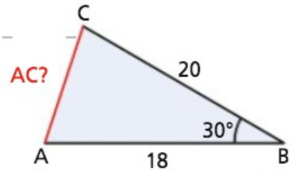
194 $a = 24$, $b = 12$, $c = 12\sqrt{3}$. γ? $[60°]$

195 $a = \sqrt{56}$, $b = 10$, $c = 6$. $\cos\alpha$? $\left[\frac{2}{3}\right]$

196 $a = 12$, $b = 4\sqrt{10}$, $c = 8$. $\tan\beta$? $[\sqrt{15}]$

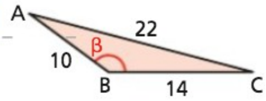
Nelle seguenti figure determina ciò che è richiesto.

197



$[\simeq 10]$

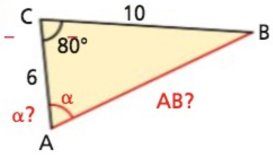
198



β?

$[\simeq 132°]$

199



$[\simeq 11; \simeq 64°]$

Sono noti due lati e l'angolo compreso fra essi

222 Risolvi il triangolo ABC, sapendo che $b = 12$, $c = 18$, $\alpha = 21°$.

COMPLETA LO SVOLGIMENTO

Applicando il teorema del coseno, ricaviamo a:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$;

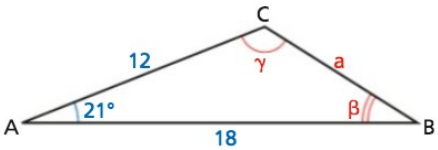
$a^2 = 12^2 + 18^2 - 2\cdot 12\cdot 18\boxed{} \simeq 64{,}69$;

$a \simeq 8{,}04$.

Ricaviamo β, applicando ancora il teorema del coseno:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \rightarrow \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - \boxed{}}{2ac}; \quad \cos\beta \simeq \frac{8{,}04^2 + 18^2 - \boxed{}}{2\cdot 8{,}04\cdot\boxed{}} \simeq 0{,}85 \rightarrow \beta \simeq 32°.$$

Ricaviamo γ per differenza: $\gamma \simeq \boxed{} - (21° + \boxed{}) = 127°$.



Risolvi il triangolo *ABC*, noti gli elementi indicati.

223 $a = 15{,}3$, $b = 6{,}2$, $\gamma = 128°$. $[c \simeq 19{,}73; \alpha \simeq 38°; \beta \simeq 14°]$

224 $a = \sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$, $\beta = 60°$. $[b \simeq 7{,}94; \alpha \simeq 11°; \gamma \simeq 109°]$

225 $b = 4$, $c = 20$, $\alpha = \frac{2}{3}\pi$. $[a \simeq 22{,}27; \beta \simeq 9°; \gamma \simeq 51°]$

226 $a = 4\sqrt{3}$, $b = 6\sqrt{2}$, $\tan\gamma = \sqrt{3}$. $[\alpha \simeq 50°; \beta \simeq 70°; c \simeq 7{,}82]$

227 $a = 14$, $c = 10$, $\cos\beta = \frac{2}{7}$. $[b = 6\sqrt{6}; \alpha \simeq 66°; \gamma \simeq 41°]$